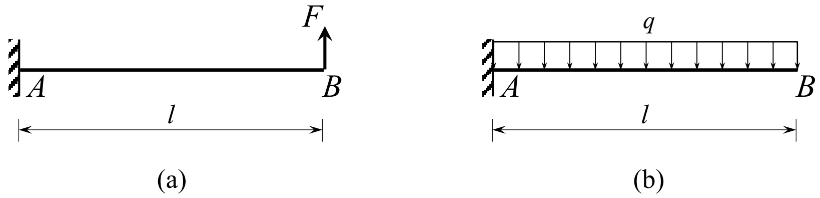
第 16 章　梁的弯曲变形　习题解答

16-1 试用积分法建立图示梁的转角方程与挠曲线方程，并计算梁的绝对值最大的转角与绝对值最大的挠度。已知梁的 EI 为常量。



习题 16-1 图

题 16-1(a)解：

弯矩方程：$M(x)=F(l-x) \quad (0<x\le l)$

转角方程：$\theta(x)=\int\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x+C=\int\frac{F(l-x)}{EI}\mathrm{d}x+C=\frac{F}{EI}\int(l-x)\mathrm{d}x+C$

$=\frac{F}{EI}(lx-\frac{1}{2}x^2)+C=\frac{Fx}{2EI}(2l-x)+C$

挠曲线（挠度）方程：$w(x)=\int(\int\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+Cx+D=\int\frac{F}{EI}(lx-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x+Cx+D$

$=\frac{F}{EI}(l\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3)+Cx+D=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)+Cx+D$

由边界条件确定积分常数：

当 $x=0$ 时，$\theta(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C=0$；$w(0)=0 \quad \Rightarrow \quad D=0$

则 $\theta(x)=\frac{Fx}{2EI}(2l-x)$，$w(x)=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$

确定转角和挠度的最大值：

当 $x=l$ 时，

$$\theta_{\max}=\theta_B=\theta(l)=\frac{Fx}{2EI}(2l-x)\Big|_{x=l}=\frac{Fl}{2EI}(2l-l)=\frac{Fl^2}{2EI}$$ （逆时针）

$$w_{\max}=w_B=w(l)=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)\Big|_{x=l}=\frac{Fl^2}{6EI}(3l-l)=\frac{Fl^3}{3EI}$$ （↑）

题 16-1(b)解：

弯矩方程：$M(x)=-\frac{1}{2}q(l^2+x^2)+qlx=-\frac{1}{2}q(l-x)^2$　（$0<x\le l$）

转角方程：$\theta(x)=\int\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x+C=\int\frac{-\frac{1}{2}q(l-x)^2}{EI}\mathrm{d}x+C=-\frac{q}{2EI}\int(l-x)^2\mathrm{d}x+C$

$=-\frac{q}{2EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}(l-x)^3\right]+C=\frac{q(l-x)^3}{6EI}+C$

挠曲线（挠度）方程：$w(x)=\int(\int\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+Cx+D=\int\left[\frac{q(l-x)^3}{6EI}\right]\mathrm{d}x+Cx+D$

$=\frac{q}{6EI}\int\left[(l-x)^3\right]\mathrm{d}x+Cx+D=\frac{q}{6EI}\cdot\left[-\frac{1}{4}(l-x)^4\right]+Cx+D=-\frac{q(l-x)^4}{24EI}+Cx+D$

由边界条件确定积分常数：

当 $x=0$ 时，$\theta(0)=0\quad\Rightarrow\quad C=-\frac{ql^3}{6EI}$；$w(0)=0\quad\Rightarrow\quad D=\frac{ql^4}{24EI}$

则　$\theta(x)=\frac{q(l-x)^3}{6EI}-\frac{ql^3}{6EI}=\frac{q}{6EI}[(l-x)^3-l^3]=\frac{qx}{6EI}(-x^2+3lx-3l^2)$

$w(x)=-\frac{q(l-x)^4}{24EI}-\frac{ql^3}{6EI}x+\frac{ql^4}{24EI}=\frac{q}{24EI}\left[-(l-x)^4-4l^3x+l^4\right]$

$=\frac{qx^2}{24EI}(4lx-6l^2-x^2)$

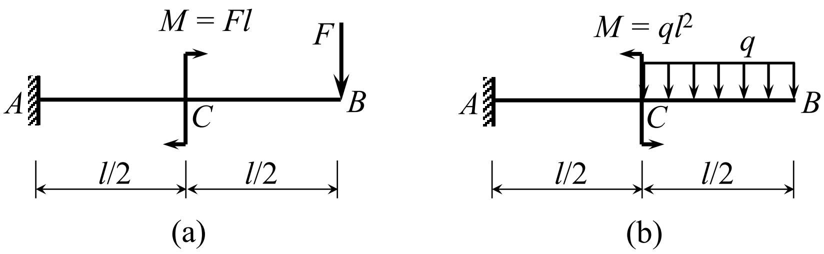
确定转角和挠度的最大值：

当 $x=l$ 时，

$\theta_{\max}=\theta_B=\theta(l)=\frac{qx}{6EI}(-x^2+3lx-3l^2)\Big|_{x=l}=\frac{ql}{6EI}(-l^2+3l\cdot l-3l^2)=-\frac{ql^3}{6EI}$（顺时针）

$w_{\max}=w_B=w(l)=\frac{qx^2}{24EI}(4lx-6l^2-x^2)\Big|_{x=l}=\frac{ql^2}{24EI}(4l\cdot l-6l^2-l^2)=-\frac{ql^4}{8EI}$（↓）

16-2 试用积分法建立图示各梁的转角方程与挠曲线方程，并计算截面 B 的转角与挠度。已知梁的 EI 为常量。



习题 16-2 图

题 16-2(a)解：

弯矩方程：

AC 段：$M_1(x_1)=F(x_1-2l)$ （$0<x_1<\frac{1}{2}l$ ）

CB 段：$M_2(x_2)=F(x_2-l)$ （$\frac{1}{2}l<x_2\le l$ ）

转角方程：

AC 段：$\theta_1(x_1)=\int\frac{M_1(x_1)}{EI}\mathrm{d}x_1+C_1=\int\frac{F(x_1-2l)}{EI}\mathrm{d}x_1+C_1=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x_1^2-2lx_1)+C_1$

$=\frac{Fx_1}{2EI}(x_1-4l)+C_1$

CB 段：$\theta_2(x_2)=\int\frac{M_2(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2+C_2=\int\frac{F(x_2-l)}{EI}\mathrm{d}x_2+C_2=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x_2^2-lx_2)+C_2$

$=\frac{Fx_2}{2EI}(x_2-2l)+C_2$

挠曲线（挠度）方程：

AC 段：$w_1(x_1)=\int(\int\frac{M_1(x_1)}{EI}\mathrm{d}x_1)\mathrm{d}x_1+C_1x_1+D_1=\int[\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x_1^2-2lx_1)]\mathrm{d}x_1+C_1x_1+D_1$

$=\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x_1^3-2l\cdot\frac{1}{2}x_1^2)+C_1x_1+D_1=\frac{Fx_1^2}{6EI}(x_1-6l)+C_1x_1+D_1$

CB 段：$w_2(x_2)=\int(\int\frac{M_2(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2)\mathrm{d}x_2+C_2x_2+D_2=\int[\frac{F}{EI}(\frac{1}{2}x_2^2-lx_2)]\mathrm{d}x_2+C_2x_2+D_2$

$=\frac{Fx_2^2}{6EI}(x_2-3l)+C_2x_2+D_2$

由边界条件和连续条件确定积分常数：

当 $x_1=0$ 时，$\theta_1(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0$；$w_1(0)=0 \quad \Rightarrow \quad D_1=0$

当 $x_1=x_2=\frac{1}{2}l$ 时，

$$\theta_1(\frac{1}{2}l)=\theta_2(\frac{1}{2}l) \quad \Rightarrow \quad \frac{Fx_1}{2EI}(x_1-4l)\Big|_{x_1=\frac{1}{2}l}=\frac{Fx_2}{2EI}(x_2-2l)\Big|_{x_2=\frac{1}{2}l}+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{F\cdot\frac{1}{2}l}{2EI}(\frac{1}{2}l-4l)=\frac{F\cdot\frac{1}{2}l}{2EI}(\frac{1}{2}l-2l)+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{Fl^2}{2EI}$$

$$w_1(\frac{1}{2}l)=w_2(\frac{1}{2}l) \quad \Rightarrow \quad \frac{Fx_1^2}{6EI}(x_1-6l)\Big|_{x_1=\frac{1}{2}l}=\frac{Fx_2^2}{6EI}(x_2-3l)+C_2x_2\Big|_{x_2=\frac{1}{2}l}+D_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{F\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(\frac{1}{2}l-6l)=\frac{F\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(\frac{1}{2}l-3l)-\frac{Fl^2}{2EI}\cdot\frac{1}{2}l+D_2 \quad \Rightarrow$$

$$D_2=\frac{F\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(\frac{1}{2}l-6l-\frac{1}{2}l+3l)+\frac{Fl^2}{2EI}\cdot\frac{1}{2}l=\frac{Fl^3}{8EI}$$

则 $\theta_1(x_1)=\frac{Fx_1}{2EI}(x_1-4l)$，$w_1(x_1)=\frac{Fx_1^2}{6EI}(x_1-6l)$；

$$\theta_2(x_2)=\frac{Fx_2}{2EI}(x_2-2l)-\frac{Fl^2}{2EI}=\frac{F}{2EI}(x_2^2-2lx_2-l^2),$$

$$w_2(x_2)=\frac{Fx_2^2}{6EI}(x_2-3l)-\frac{Fl^2}{2EI}x_2+\frac{Fl^3}{8EI}=\frac{F}{24EI}(4x_2^3-12lx_2^2-12l^2x_2+3l^3)$$

截面 B 的转角为 $\theta_B=\theta_2(l)=\frac{F}{2EI}(x_2^2-2lx_2-l^2)\Big|_{x_2=l}=-\frac{Fl^2}{EI}$

截面 B 的挠度为 $w_B=w_2(l)=\frac{F}{24EI}(4x_2^3-12lx_2^2-12l^2x_2+3l^3)\Big|_{x=l}=-\frac{17Fl^3}{24EI}$

题 16-2(b)解：

弯矩方程：

AC 段：$M_1(x)=\frac{1}{2}qlx+\frac{5}{8}ql^2$　（$0<x<\frac{1}{2}l$）

CB 段：$M_2(x)=\frac{5}{8}ql^2+\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}q(x-\frac{1}{2}l)^2-ql^2=-\frac{1}{2}q(x-\frac{1}{2}l)^2+\frac{1}{2}qlx-\frac{3}{8}ql^2$

$=-\frac{1}{2}q(x-l)^2$　（$\frac{1}{2}l<x\le l$）

转角方程：

AC 段：$\theta_1(x)=\int\frac{M_1(x)}{EI}\mathrm{d}x+C_1=\int\frac{\frac{1}{2}qlx+\frac{5}{8}ql^2}{EI}\mathrm{d}x+C_1=\frac{q}{8EI}\int(4lx+5l^2)\mathrm{d}x+C_1$

$=\frac{q}{8EI}(4l\cdot\frac{1}{2}x^2+5l^2x)+C_1=\frac{ql}{8EI}(2x^2+5lx)+C_1$

CB 段：$\theta_2(x)=\int\frac{M_2(x)}{EI}\mathrm{d}x+C_2=\int\frac{-\frac{1}{2}q(x-l)^2}{EI}\mathrm{d}x+C_2=-\frac{q}{2EI}\int(x-l)^2\mathrm{d}x+C_2$

$=-\frac{q}{2EI}\cdot\frac{1}{3}(x-l)^3+C_2=-\frac{q(x-l)^3}{6EI}+C_2$

挠曲线（挠度）方程：

AC 段：$w_1(x)=\int(\int\frac{M_1(x)}{EI}\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+C_1x+D_1=\int[\frac{ql}{8EI}(2x^2+5lx)]\mathrm{d}x+C_1x+D_1$

$=\frac{ql}{8EI}\cdot(2\cdot\frac{1}{3}x^3+5l\cdot\frac{1}{2}x^2)+C_1x+D_1=\frac{qlx^2}{48EI}\cdot(4x+15l)+C_1x+D_1$

CB 段：$w_2(x)=\int(\int\frac{M_2(x)}{EI}\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+C_2x+D_2=\int[-\frac{q(x-l)^3}{6EI}]\mathrm{d}x+C_2x+D_2$

$=-\frac{q}{6EI}\int(x-l)^3\mathrm{d}x+C_2x+D_2=-\frac{q}{6EI}\cdot\frac{1}{4}(x-l)^4+C_2x+D_2=-\frac{q(x-l)^4}{24EI}+C_2x+D_2$

由边界条件和连续条件确定积分常数：

当 $x=0$ 时，$\theta_1(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$；$w_1(0)=0 \quad\Rightarrow\quad D_1=0$

当 $x=\frac{1}{2}l$ 时，

$$\theta_1(\frac{1}{2}l)=\theta_2(\frac{1}{2}l) \quad \Rightarrow \quad \frac{ql}{8EI}(2x^2+5lx)\Big|_{x=\frac{1}{2}l}+C_1==-\frac{q(x-l)^3}{6EI}\Big|_{x=\frac{1}{2}l}+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{ql}{8EI}[2\cdot(\frac{1}{2}l)^2+5l\cdot\frac{1}{2}l]=-\frac{q(\frac{1}{2}l-l)^3}{6EI}+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=\frac{3ql^3}{8EI}-\frac{ql^3}{48EI}=\frac{17ql^3}{48EI}$$

$$w_1(\frac{1}{2}l)=w_2(\frac{1}{2}l) \quad \Rightarrow \quad \frac{qlx^2}{48EI}\cdot(4x+15l)\Big|_{x=\frac{1}{2}l}=-\frac{q(x-l)^4}{24EI}+C_2x+D_2\Big|_{x=\frac{1}{2}l} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{ql\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{48EI}\cdot(4\cdot\frac{1}{2}l+15l)=-\frac{q(\frac{1}{2}l-l)^4}{24EI}+\frac{17ql^3}{48EI}\cdot\frac{1}{2}l+D_2 \quad \Rightarrow$$

$$D_2=\frac{17ql^4}{4\times48EI}+\frac{ql^4}{16\times24EI}-\frac{17ql^4}{2\times48EI}=\frac{ql^4}{48EI}(\frac{17}{4}+\frac{1}{8}-\frac{17}{2})=-\frac{33ql^4}{384EI}$$

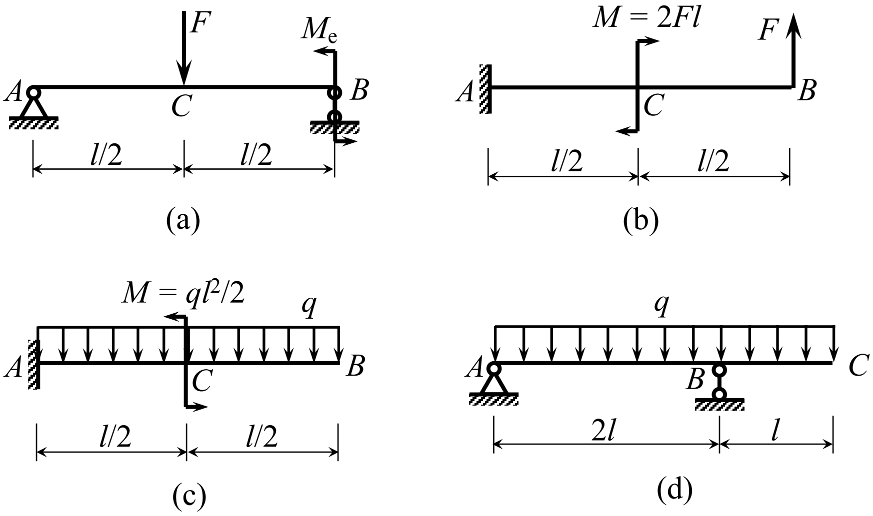
则　AC 段：$\theta_1(x)=\frac{ql}{8EI}(2x^2+5lx)$，$w_1(x)=\frac{qlx^2}{48EI}(4x+15l)$

CB 段：$\theta_2(x)=-\frac{q(x-l)^3}{6EI}+\frac{17ql^3}{48EI}$，$w_2(x)=-\frac{q(x-l)^4}{24EI}+\frac{17ql^3}{48EI}x-\frac{33ql^4}{384EI}$

截面 B 的转角为 $\theta_B=\theta_2(l)=\frac{17ql^3}{48EI}$（逆时针）

截面 B 的挠度为 $w_B=w_2(l)=\frac{17ql^4}{48EI}-\frac{33ql^4}{384EI}=\frac{103ql^4}{384EI}$（↑）

16-3 试用叠加法计算图示各梁截面 B 的转角与截面 C 的挠度。已知梁的 EI 为常量。



习题 16-3 图

题 16-3(a)解：

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 8”得到

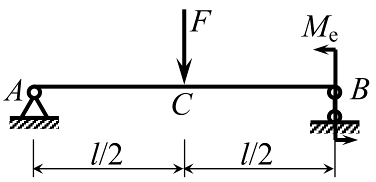
$$w_C^F = \frac{Fl^3}{48EI}\ (\downarrow),\quad \theta_B^F = \frac{Fl^2}{16EI}\ \text{（逆时针）}$$

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 6”得到

$$w_C^{M_e} = \frac{M_e x}{6EIl}(l^2 - x^2)\bigg|_{x=\frac{1}{2}l} = \frac{M_e \cdot \frac{1}{2}l}{6EIl}(l^2 - \frac{1}{4}l^2)$$

$$= \frac{M_e l^2}{16EI}\ (\downarrow)$$

$$\theta_B^{M_e} = \frac{M_e l}{3EI}\ \text{（逆时针）}$$



习题 16-3(a)图

叠加法： $w_C = w_C^F + w_C^{M_e} = \dfrac{Fl^3}{48EI} + \dfrac{M_e l^2}{16EI}$ （↓）

$\theta_B = \theta_B^F + \theta_B^{M_e} = \dfrac{Fl^2}{16EI} + \dfrac{M_e l}{3EI}$ （逆时针）

题 16-3(b)解：

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 3”得到

$$\theta_B^F=\frac{Fl^2}{2EI}\text{（逆时针），}\quad w_C^F=\frac{Fx^2}{6EI}(3l-x)\bigg|_{x=\frac{1}{2}l}=\frac{F\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{6EI}(3l-\frac{1}{2}l)=\frac{5Fl^3}{48EI}\text{（}\uparrow\text{）}$$

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 1”得到

$$\theta_B^M=\theta_C^M=\frac{M\cdot(\frac{1}{2}l)}{EI}=\frac{2Fl\cdot(\frac{1}{2}l)}{EI}=\frac{Fl^2}{EI}\text{（顺时针），}$$

$$w_C^M=\frac{M\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{2EI}=\frac{2Fl\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{2EI}=\frac{Fl^3}{4EI}\text{（}\downarrow\text{）}$$

叠加法：

$$w_C=w_C^F+w_C^M=\frac{5Fl^3}{48EI}(\uparrow)-\frac{Fl^3}{4EI}(\downarrow)=-\frac{7Fl^3}{48EI}$$（负号表示截面 C 的挠度向下）

$$\theta_B=\theta_B^F+\theta_B^M=\frac{Fl^2}{2EI}\text{（逆时针）}-\frac{Fl^2}{EI}\text{（顺时针）}=-\frac{Fl^2}{2EI}$$（负号表示截面 B 的转角为顺时针）

题 16-3(c)解：

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 5”得到

$\theta_B^q = \dfrac{ql^3}{6EI}$ （顺时针），

$w_C^q = \dfrac{qx^2}{24EI}(4lx - 6l^2 - x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}l} = \dfrac{q\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{24EI}[4l\cdot\frac{1}{2}l - 6l^2 - (\frac{1}{2}l)^2] = -\dfrac{17ql^4}{384EI}$ （负号表示截面 C 的挠度向下）

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 1”得到

$\theta_B^M = \theta_C^M = \dfrac{M\cdot\frac{1}{2}l}{EI} = \dfrac{\frac{1}{2}ql^2\cdot\frac{1}{2}l}{EI} = \dfrac{ql^3}{4EI}$ （逆时针）

$w_C^M = \dfrac{M\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{2EI} = \dfrac{\frac{1}{2}ql^2\cdot(\frac{1}{2}l)^2}{2EI} = \dfrac{ql^4}{16EI}$ （↑）

叠加法：

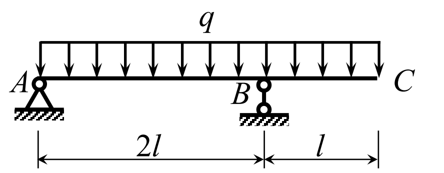
$w_C = w_C^q + w_C^M = -\dfrac{17ql^4}{384EI} + \dfrac{ql^4}{16EI} = \dfrac{7ql^4}{384EI}$ （↑）

$\theta_B = \theta_B^q + \theta_B^M = -\dfrac{ql^3}{6EI} + \dfrac{ql^3}{4EI} = \dfrac{3l^3}{12EI}$ （逆时针）

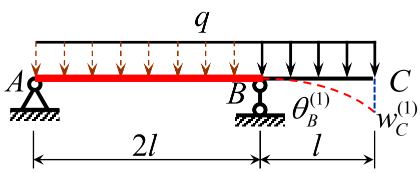
题 16-3(d)解：

1. 刚化 *AB* 段，只考虑 *BC* 段的变形：

如图(a)所示。



习题 16-3(d)图

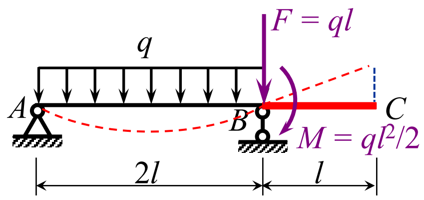


习题 16-3(d)解答图 (a)

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 5”得到 $w_C^{(1)} = \dfrac{ql^4}{8EI}$（↓），$\theta_B^{(1)} = 0$

2. 刚化 *BC* 段，只考虑 *AB* 段的变形：

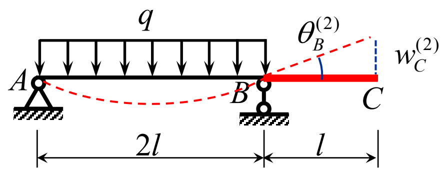
如图(b)所示。



习题 16-3(d)解答图 (b)

2.1 仅考虑均匀分布载荷 q 的作用：

如图(c)所示



习题 16-3(d)解答图 (c)

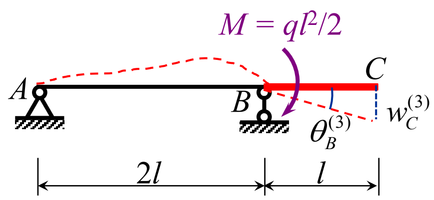
查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 5”得到

$$\theta_B^{(2)} = \frac{q\cdot(2l)^3}{24EI} = \frac{ql^3}{3EI} \text{（逆时针）}$$

$$w_C^{(2)} = l\theta_B^{(2)} = \frac{ql^4}{3EI} \text{（↑），}$$

2.2 仅考虑集中力偶 $M = ql^2/2$ 的作用：

如图(d)所示



习题 16-3(d)解答图 (d)

查“表格 7-1 梁在简单载荷作用下的变形 - 6”得到

$$\theta_B^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}ql^2\cdot(2l)}{3EI} = \frac{ql^3}{3EI} \text{（顺时针）}$$

$$w_C^{(3)} = l\theta_B^{(3)} = \frac{ql^4}{3EI} \text{（↓）}$$

2.3 仅考虑集中力 $F = ql$ 的作用：由于集中力 F 作用于支座处，梁无变形。

3. 叠加法：

$$w_C = w_C^{(1)} + w_C^{(2)} + w_C^{(3)} = -\frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^4}{3EI} - \frac{ql^4}{3EI} = -\frac{ql^4}{8EI}$$（负号表示截面 C 的挠度向下）

$$\theta_B = \theta_B^{(1)} + \theta_B^{(2)} + \theta_B^{(3)} = 0 + \frac{ql^3}{3EI} - \frac{ql^3}{3EI} = 0$$