河南省许平汝联盟2022-2023学年

高二上学期期中联考数学试题

考试说明:

1．本试卷共150分，考试时间120分钟。

2．请将各题〖答 案〗填在答题卡上。

一、单选题:本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量$\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-4,2,3)$，则$2\vec{a}+\vec{b}=$(　　)

A. $(4,-2,6)$　　B. (-8,4,6)　　C. (0,0,9)　　D. (-2,1,6)

2. 直线$x+y+7=0$的倾斜角为(　　)

A. 45°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 135°

3. 若椭圆$\frac{x^2}{25}+y^2=1$上一点P到椭圆一个焦点的距离为6，则P到另一个焦点的距离为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 已知圆C_1与圆$C_2:(x-1)^2+(y+2)^2=4$关于直线$y=x$对称，则圆C_1的方程为(　　)

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$　　B. $(x+2)^2+(y+1)^2=4$

C. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$　　D. $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

5. 若实数k满足$0<k<3$，则曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9-k^2}=1$与曲线$\frac{y^2}{16-k^2}-\frac{x^2}{9}=1$(　　)

A. 焦距相等　　B. 实轴长相等

C. 虚轴长相等　　D. 离心率相等

6. 直线$y=x-b$与曲线$x=\sqrt{4-y^2}$有且仅有一个公共点，则实数b的取值范围为(　　)

A. $\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$　　B. $(-2,2]\cup\{2\sqrt{2}\}$

C. $[-2,2\sqrt{2})\cup\{2\sqrt{2}\}$　　D. $[-2,2)\cup\{2\sqrt{2}\}$

7. 已知四面体 $A-BCD$ 的所有棱长都等于 $2, E$ 是棱 AB 的中点, F 是棱 CD 靠近 C 的四等分点, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$

8. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为( )

A. $a(a+c)$　　B. $b(a+c)$　　C. $a(a-c)$　　D. $b(a-c)$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 下列说法正确的是( )

A. 已知直线 $(a+2)x+2ay-1=0$ 与直线 $3ax-y+2=0$ 垂直, 则实数 a 的值是 $-\frac{4}{3}$

B. 直线 $mx-y+1-m=0$ 必过定点(1,1)

C. 直线 $y=3x-2$ 在 y 轴上的截距为-2

D. 经过点(1,3)且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-4=0$

10. 设圆 $O: x^2+y^2=r^2\left(r\in N^*\right)$, 点 $A(6,8)$, 若圆 O 上存在两点到 A 的距离为 2, 则 r 可能取值为( )

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

11. 已知平面 α 过点 $M(1,\sqrt{3},2)$, 其法向量 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,0)$, 则下列点不在平面 α 内的是( )

A. $S(2,0,0)$　　B. $Q(2,0,4)$　　C. $R(0,2,\sqrt{3})$　　D. $T(-2,\sqrt{3},1)$

12. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线分别交 y 轴、双曲线右支于点 M 、点 P, 且 $|MP|=\left|MF_1\right|$, 下列判断正确的是( )

A. $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{6}$

B. E的离心率等于$2+\sqrt{3}$

C. $\triangle PF_1F_2$的内切圆半径是$\sqrt{3}-1$

D. 双曲线渐近线的方程为$y=\pm\sqrt{2}x$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M 、N分别是B_1C_1、AA_1的中点, 则直线BD_1与MN所成角的余弦值为_____.

14. 圆$C_1: x^2+y^2+2x-12=0$与圆$C_2: x^2+y^2+4x-4y=0$的交点为A,B, 则弦AB的长为_____.

15. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 直线$l$与椭圆$C$交于$A,B$两点, 直线$y=-\dfrac{1}{2}x$与直线$l$的交点恰好为线段$AB$的中点, 则直线$l$的斜率为_____.

16. 已知F为椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左焦点, 直线$l: y=kx(k\neq 0)$与椭圆$C$交于$A,B$两点, M为椭圆上的任一点, 则$k_{MA}\cdot k_{MB}=$_____; 若$AE\perp x$轴, 垂足为E,BE与椭圆C的另一个交点为$P,\angle PAB$的余弦值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步聚。

17. (本题满分 10 分)

已知$\triangle ABC$ 的顶点$A(2,3),B(1,0),C(2,-2)$. 求:

(1) AB边所在直线的方程;

(2) $\triangle ABC$ 的面积.

18.（本题满分 12 分)

已知F_1,F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<10)$的左、右焦点,$P$是椭圆上一点. 当$PF_1\perp x$轴时, $|PF_1|=\frac{32}{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 当$\angle F_1PF_2=60^\circ$时, 求$\triangle F_1PF_2$的面积.

19. (本题满分 12 分)

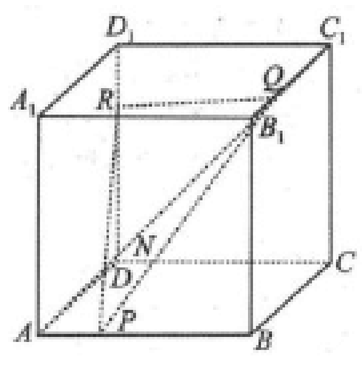
已知圆C过点$A(2,0),B(1,3)$, 且圆心C在直线$x-y+1=0$上.

(1) 求圆C的方程;

(2) 判断直线$l:3x+y-6=0$与圆C的位置关系；若相交, 求直线l被圆C截得的弦长.

20. (本题满分 12 分)

如图, 在棱长为 3 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, 点P,Q,R分别在AB,B_1C_1,D_1D上, 且$AP=B_1Q=D_1R=1,\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$.

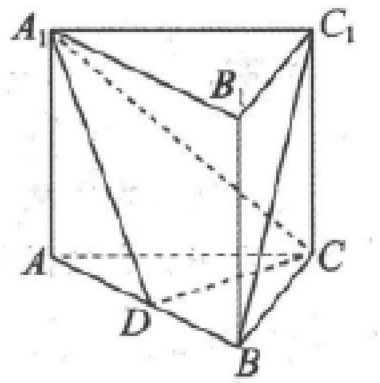


(1) 求直线AC_1与平面PQR所成角的正弦值;

(2) 证明:$PN\subset$平面PQR.

21.（本题满分 12 分)

如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=\sqrt{3}AB$, D 为 AB 上一点.

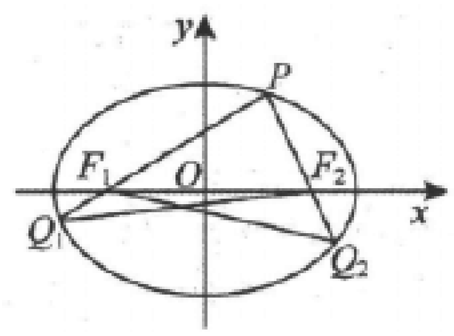


(1) 确定 D 的位置使 BC_1 // 平面 A_1CD；

(2) 对于（1）中 D 的位置, 求平面 A_1AC 与平面 A_1CD 夹角的余弦值.

22.（本题满分 12 分)

已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点 F_1,F_2 分别是双曲线 $C_2:x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左右顶点, 且椭圆 C_1 的上顶点到双曲线 C_2 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 设 P 是第一象限内 C_1 上的一点, PF_1,PF_2 的延长线分别交 C_1 于点 Q_1,Q_2, 设 r_1,r_2 分别为 $\triangle PF_1Q_2$、$\triangle PF_2Q_1$ 的内切圆半径, 求 r_1-r_2 的最大值.

参 *考 *答 *案

1.C 解：$\vec{a}=(2,-1,3)$，$2\vec{a}=(4,-2,6)$，$\vec{b}=(-4,2,3)$，$2\vec{a}+\vec{b}=(0,0,9)$.

2.D

3.B 解：由椭圆$\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$，得$a=5$，则$2a=10$.

因为点P到椭圆一焦点的距离为 6，由定义得点P到另一焦点的距离为$2a-6=10-6=4$，

故选：B.

4.D 解：$C_2:(x-1)^2+(y+2)^2=4$的圆心为$C_2(1,-2)$，C_2关于$y=x$对称的点为$(-2,1)$，

故圆$C_2:(x-1)^2+(y+2)^2=4$关于直线$y=x$对称的圆C_1的方程为$(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

5.A

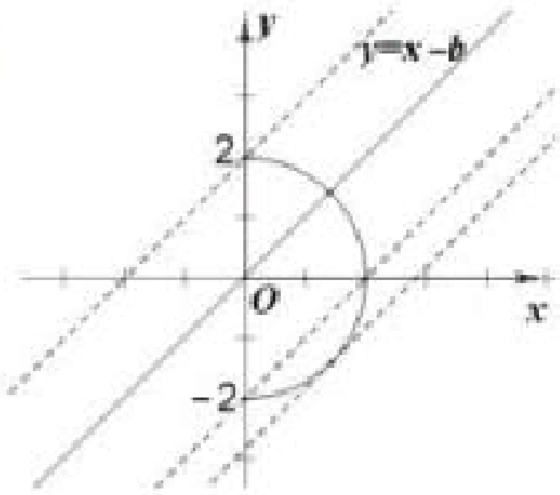
6.D 解：首先曲线$x=\sqrt{4-y^2}$是一个半圆，

当直线$y=x-b$与曲线$x=\sqrt{4-y^2}$相切时，求得

b的值为$2\sqrt{2}$，

当$-2<-b\le 2$时，直线$y=x-b$与曲线

$x=\sqrt{4-y^2}$有且仅有一个公共点，



综上所述，$-2\le b<2$或$b=2\sqrt{2}$.故选：D.

7. D 解：因为E是棱AB的中点，F是棱CD靠近C的四等分点,所以

$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$，因为

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos60^0=2$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos60^0=2$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos120^0=-2$，

所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\times2+2+\dfrac{1}{4}\times(-2)=\dfrac{5}{2}$.

8.A 解：由椭圆方程得$F(-c,0)$，设$P(x_0,y_0)$，

则 $\overline{OP}\cdot\overline{FP}=\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x_0+c,y_0\right)=x_0^{\ 2}+cx_0+y_0^{\ 2}$

$\because P$ 为椭圆上一点，$\therefore \dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$，

$\therefore \overline{OP}\cdot\overline{FP}=x_0^{\ 2}+cx_0+y_0^{\ 2}=x_0^{\ 2}+cx_0+\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2-x_0^{\ 2}\right)=\dfrac{c^2}{a^2}x_0^{\ 2}+cx_0+b^2$

$=\dfrac{c^2}{a^2}\left(x_0^{\ 2}+\dfrac{a^2}{c}x_0+\dfrac{a^4}{4c^2}\right)+b^2-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{c^2}{a^2}\left(x_0+\dfrac{a^2}{2c}\right)^2+b^2-\dfrac{a^2}{4}$，因为 $-a\le x_0\le a$，

对称轴为 $x=-\dfrac{a^2}{2c}$，故当 $x_0=a$ 时 $\overline{OP}\cdot\overline{FP}$ 取得最大值 $a\left(a+c\right)$.

9.BC 解：对 A：因为直线 $\left(a+2\right)x+2ay-1=0$ 与直线 $3ax-y+2=0$ 垂直，

则 $3a\left(a+2\right)-2a=3a^2+4a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{4}{3}$，A 不正确；

对 B：直线 $mx-y+1-m=0$ 可变为 $m\left(x-1\right)+1-y=0$，

因此直线必过定点 $\left(1,1\right)$，即 B 正确；

对 C：直线 $y=3x-2$ 在 y 轴上的截距，令 $x=0$，得 $y=-2$，所以直线 $y=3x-2$ 在 y 轴上的截距为 -2，所以 C 正确.

对 D：经过点 $\left(1,3\right)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-4=0$ 或 $y=3x$，所以 D 不正确；故选：BC.

10.ABC 解：根据题意设以 $A\left(6,8\right)$ 为圆心，2 为半径的圆为圆 A，

所以圆 O：$x^2+y^2=r^2\left(r\in\mathbf{N}^*\right)$，圆心为 $O\left(0,0\right)$，半径为 r，则两圆圆心距为：$\left|OA\right|=10$，

因为圆 O 上存在两点到 A 的距离为 2，所以圆 O 与圆 A 相交，

所以 $r-2<10<r+2$，解得：$8<r<12$.

又 $r\in N^*$，所以 r 的可能取值为 9,10，11 故选：ABC.

11.CD 解：A．$S(2,0,0)$，$\overrightarrow{SM}=(-1,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{m}=-1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times1+2\times0=0$，$S$ 在平面 α 内；

B．$Q(2,0,4)$，$\overrightarrow{QM}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{m}=-1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times1-2\times0=0$，$Q$ 在平面 α 内；

C. $R\left(0,2,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{RM}=(1,\sqrt{3}-2,2-\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{RM}\cdot\vec{m}=1\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-2\right)\times1+(2-\sqrt{3})\times0=2\sqrt{3}-2\neq0$，$R$ 不在平面 α 内；

D. $T\left(-2,\sqrt{3},1\right)$，$\overrightarrow{TM}=(3,0,1)$，$\overrightarrow{TM}\cdot\vec{m}=3\times\sqrt{3}+0\times1+1\times0=3\sqrt{3}\neq0$，$T$ 不在平面 α 内；故选：CD.

12.AB 解：因为 M,O 分别是 PF_1,F_1F_2 的中点，所以在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$PF_2//MO$，

所以 $PF_2\perp x$ 轴

A 选项中，因为直线 PF_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{6}$，故 A 正确

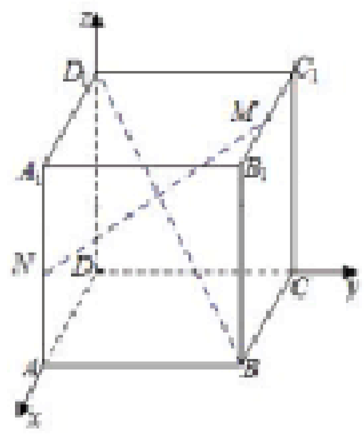
B 选项中，$Rt\Delta PF_1F_2$ 中，$F_1F_2=2c,PF_2=2\sqrt{3}c,PF_1=4c$，

所以 $PF_1-PF_2=2a=4c-2\sqrt{3}c$，得：$e=\frac{c}{a}=2+\sqrt{3}$，故 B 正确

C 选项中，$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $\left(6+2\sqrt{3}\right)c$，设内切圆半径为 r，根据三角形的等面积法，有 $\left(6+2\sqrt{3}\right)cr=2c\cdot2\sqrt{3}c$，得：$r=\left(\sqrt{3}-1\right)c$，是与 c 有关的式子，所以 C 错误.

D 选项中，$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{6+4\sqrt{3}}$，双曲线渐近线的方程为 $y=\pm\sqrt{6+4\sqrt{3}}x$

故 D 错误；故选：AB.



13. 0 解：以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系；

设棱长为 2，则 $D_1(0,0,2)$，$B(2,2,0)$，$N(2,0,1)$，

$M(1,2,2)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{MN}=(1,-2,-1)$

$\therefore\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{MN}=1\times(-2)+(-2)\times(-2)+(-1)\times2=0$，

即 $\overrightarrow{BD_1}\perp\overrightarrow{MN}$，异面直线 BD_1 与 MN 所成的角的余弦值为 0.

14. $4\sqrt{2}$ 解：圆 $C_1: x^2+y^2+2x-12=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2+4x-4y=0$ 联立可得公共弦的方程为 $x-2y+6=0$，$C_2: x^2+y^2+4x-4y=0$ 的圆心为 $C_2(-2,2)$ 在 $x-2y+6=0$ 上，故弦 AB 的长为圆 C_2 的直径 $4\sqrt{2}$.

15. $\frac{1}{2}$ 解：由题意可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，整理可得 $a=2b$.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减可得

$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$.

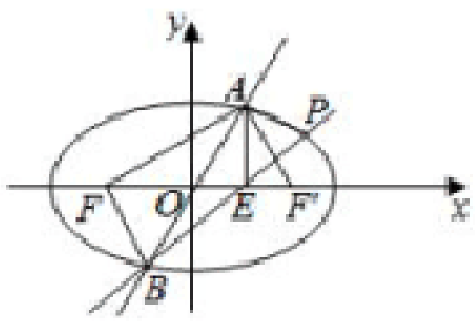
因为直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 与直线 l 的交点恰好为线段 AB 的中点，所以 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，

则直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{4}\times(-2)=\frac{1}{2}$.

16. $-\frac{1}{2}$，0 解：设 $M(m,n)$，$A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，

$k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_0-n}{x_0-m}\times\frac{-y_0-n}{-x_0-m}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$，因为点 M,A 在椭圆上，$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$，$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，

两式相减得，$\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$，故 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{1}{2}$.



由题意得，$k_{AB}=k$，因为 $E(x_0,0)$，$k_{BE}=\frac{0+y_0}{x_0+x_0}=\frac{1}{2}\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}k$，而

$k_{PB}=k_{BE}=\frac{1}{2}k$，则 $k_{PA}\cdot\frac{1}{2}k=-\frac{1}{2}$，得 $k_{PA}=-\frac{1}{k}$，$k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$，

故 $\angle PAB$ 的余弦值为 0.

17. 解：（1）$k_{AB}=\frac{0-3}{1-2}=3$，AB 边所在直线的方程为：$y-0=3(x-1)$，

即 $3x-y-3=0$ ……………………………………………5 分

（2）$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$，$C$ 到 AB 的距离为 $d=\dfrac{|3\times2-(-2)-3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$，

所以 ΔABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{2}$……………………………10 分

18.解：（1）由 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<10)$ 知 $a^2=100,a=10$，

因为 $PF_1\perp x$ 轴时 $|PF_1|=\dfrac{32}{5}$，即 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{32}{5}$，所以 $b=8$，所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

……………………………………………4 分

（2）设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n$，

$|F_1F_2|^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos\angle F_1PF_2$，可得 $4c^2=(m+n)^2-3mn=4a^2-3mn$，

所以 $mn=\dfrac{4b^2}{3}=\dfrac{256}{3}$，……………………………………………8 分

所以 $S_{\Delta F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}mn\cdot\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{256}{3}=\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$……………………………………………12 分

19.（1）$A(2,0),B(1,3)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{3-0}{1-2}=-3$，线段 AB 的中点为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，又因为圆心 C 在直线 $x-y+1=0$ 上，

联立 $\begin{cases}x-y+1=0\\ y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$ 解得 $x=0,y=1$，所以圆心坐标 $C(0,1)$，又半径为

$R=|AC|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\therefore$ 圆 C 的方程为: $x^2+(y-1)^2=5$……………………8 分

（2）由（1）知: 圆 C 的标准方程为: $x^2+(y-1)^2=5$，圆心 $C(0,1)$，半径 $r=\sqrt{5}$；

点 $C(0,1)$ 到直线 $l:3x+y-6=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3\times 0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}<r$，故直线 l 与圆 C 相交，

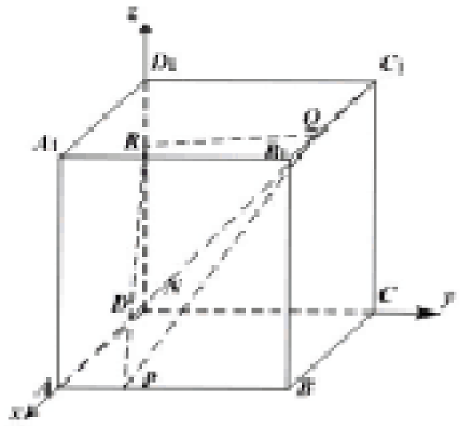
故直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{10}$ ……………………12 分

20.解：（1）以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

则 $A(3,0,0),P(3,1,0),R(0,0,2),Q(2,3,3),C_1(0,3,3),D(0,0,0)$，……………………2 分

所以 $\overrightarrow{PQ}=(-1,2,3),\overrightarrow{PR}=(-3,-1,2),\overrightarrow{AP}=(0,1,0),\overrightarrow{AC_1}=(-3,3,3)$，

设平面 PQR 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PR}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+2y+3z=0\\ -3x-y+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，

则 $\vec{m}=(1,-1,1)$，……………………4 分

设直线 AC_1 与平面 PQR 成的角为 θ，

$\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\left|\vec{m}\right|}\right|=\left|\dfrac{-3\times 1+3\times(-1)+3\times 1}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right|=\dfrac{1}{3}$……….6 分

（2）设 $\overrightarrow{PN}=m\overrightarrow{PQ}+n\overrightarrow{PR}\,(m,n\in\mathbb{R})$，又 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$，则

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{PQ}+n\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$，……………………8 分

即 $(0,1,0)+m(-1,2,3)+n(-3,-1,2)=\dfrac{1}{3}(-3,3,3)$，所以 $\begin{cases}-m-3n=-1\\ 1+2m-n=1\\ 3m+2n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{7}\\ n=\dfrac{2}{7}\end{cases}$，

故存在 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{7}\\ n=\dfrac{2}{7}\end{cases}$，使得 $\overrightarrow{PN}=m\overrightarrow{PQ}+n\overrightarrow{PM}$，$\therefore PN\subset$ 平面 PQR ……………12 分

21. 解：（1）当 D 为 AB 中点时，$BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD.

以 A 为原点，平面 ABC 内过 A 且垂直 AC 的直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，

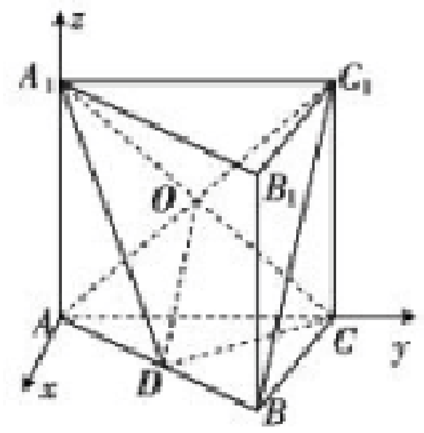
AA_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

设 $AB=1$，则 $C_1(0,1,\sqrt{3})$，$A(0,0,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$C(0,1,0)$，$A_1\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

$C_1\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，……………………2 分

设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda,0\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda,0\right)$

$\overrightarrow{A_1D}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(0,-1,\sqrt{3}\right)$，



$\overrightarrow{BC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-y+\sqrt{3}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x+\frac{1}{2}\lambda y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=3$，$x=\frac{6-3\lambda}{\sqrt{3}\lambda}$，$\therefore \vec{n}=(\frac{6-3\lambda}{\sqrt{3}\lambda},3,\sqrt{3})$……………………6 分

因为 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD，所以 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6-3\lambda}{\sqrt{3}\lambda}+\frac{1}{2}\times3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

所以 D 为 AB 的中点时满足 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD.

（2）因为平面 AA_1C 的法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n}=\left(3\sqrt{3},3,\sqrt{3}\right)$，

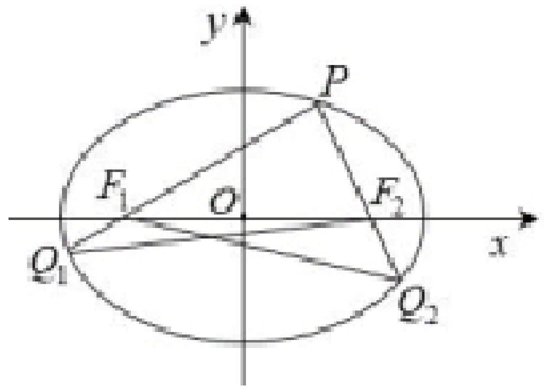
所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{1}\times\sqrt{27+9+3}}\right|=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，……………………8 分

$\therefore$ 平面 A_1AC 与平面 A_1CD 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.……………………12 分

22.解：（1）椭圆的左右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

而双曲线 C_2：$x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的顶点分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$，所以 $c=1$．

又椭圆的上顶点为 $(0,b)$，而双曲线 C_2：$x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的一条渐近线为 $y=3x$，



则有 $\dfrac{|b|}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $b=1$．

$\therefore a^2=1^2+1^2=2$，所以椭圆 C_1 的方程为

$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．……………………4 分

（2）设 $Q_1(x_1,y_1),Q_2(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，直线 F_1P 的方程为：

$y=\dfrac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，将其代入椭圆 C_1 的方程可得 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y_0^2}{(x_0+1)^2}(x+1)^2=1$，

整理可得 $(2x_0+3)x^2+4y_0^2x-3x_0^2-4x_0=0$，

则 $x_0x_1=\dfrac{-3x_0^2-4x_0}{2x_0+3}$，得 $x_1=-\dfrac{3x_0+4}{2x_0+3}$，$y_1=\dfrac{y_0}{x_0+1}(-\dfrac{3x_0+4}{2x_0+3}+1)=-\dfrac{y_0}{2x_0+3}$，

故 $Q_1(-\dfrac{3x_0+4}{2x_0+3},-\dfrac{y_0}{2x_0+3})$．

当 $x_0\neq 1$ 时，直线 F_2P 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，将其代入椭圆方程并整理可得

$(-2x_0+3)x^2-4y_0^2x-3x_0^2+4x_0=0$，

同理，可得 $Q_2(\dfrac{3x_0-4}{2x_0-3},\dfrac{y_0}{2x_0-3})$，

因为 $S_{\triangle PF_1Q_2}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}r_1,S_{\triangle PF_2Q_1}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}r_2$，

所以 $r_1-r_2=\dfrac{S_{\triangle PF_1Q_2}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{S_{\triangle PF_2Q_1}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{S_{\triangle F_1F_2Q_2}-S_{\triangle F_1F_2Q_1}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times2\cdot(-y_2)-\frac{1}{2}\times2\cdot(-y_1)}{2\sqrt{2}}$

$$=\frac{y_1-y_2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{y_0}{2x_0+3}-\frac{y_0}{2x_0-3}\right)=\frac{2\sqrt{2}x_0y_0}{x_0^2+18y_0^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{x_0}{y_0}+\frac{18y_0}{x_0}}\le\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{18y_0}{x_0}}}=\frac{1}{3},$$

当且仅当 $x_0=\frac{3\sqrt{5}}{5}, y_0=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时，等号成立.........................10 分

若 $PF_2\perp x$ 轴时，易知 $P(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$y_1=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，$y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时 $r_1-r_2=\frac{y_1-y_2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{4\sqrt{2}}{10}=\frac{1}{5}$，.........................11 分

综上，r_1-r_2 的最大值为 $\frac{1}{3}$.........................12 分

河南省许平汝联盟 2022-2023 学年

高二上学期期中联考数学试题

考试说明:

1．本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

2．请将各题〖答 案〗填在答题卡上。

一、单选题:本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量 $\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-4,2,3)$，则 $2\vec{a}+\vec{b}=$(　　)

A. $(4,-2,6)$　　B. (-8,4,6)　　C. (0,0,9)　　D. (-2,1,6)

2. 直线 $x+y+7=0$ 的倾斜角为(　　)

A. 45°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 135°

3. 若椭圆 $\frac{x^2}{25}+y^2=1$ 上一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 6，则 P 到另一个焦点的距离为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 已知圆 C_1 与圆 $C_2:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 关于直线 $y=x$ 对称，则圆 C_1 的方程为(　　)

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$　　B. $(x+2)^2+(y+1)^2=4$