第10章　三角恒等变换

10.1　两角和与差的三角函数

10.1.3　两角和与差的正切

数学

学习指导	核心素养
1. 能利用两角和与差的正、余弦公式推导出两角和与差的正切公式. 2. 能利用两角和与差的正切公式进行化简、求值、证明.	数学运算、逻辑推理两角和与差的正切公式及其应用.

两角和与差的正切公式

名称	公式	简记符号	条件
两角和的正切	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$T_{(\alpha+\beta)}$	α，β，$\alpha+\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$
两角差的正切	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$	$T_{(\alpha-\beta)}$	α，β，$\alpha-\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$

微思考

你能借助两角和与差的正、余弦公式推导 $\tan(\alpha+\beta)$与 $\tan(\alpha-\beta)$吗？

提示：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

微点拨

运用两角和与差的正切公式应注意的问题

(1)两角和与差的正切公式中，α，β，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 这是由正切函数的定义域决定的．

(2)当 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$或 $\tan(\alpha-\beta)$中任意一个的值不存在时，则不能使用两角和或差的正切公式解决问题，但可改用诱导公式或其他方法解题．

微练习

1．判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$能用公式 $\tan(\alpha+\beta)$展开．(　×　)

(2)存在 α，$\beta\in\mathbf{R}$，使 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$ 成立．(　√　)

(3)对任意 α，$\beta\in\mathbf{R}$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$都成立．(　×　)

2． 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=($　　$)$

A． -3　　B． 3

C． -4　　D． 4

3. tan 255°＝(　　)

A. $-2-\sqrt{3}$

B. $-2+\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$

D. $2+\sqrt{3}$

4. $\dfrac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}=($　　$)$

A. $\sqrt{3}$　　　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

探究点 1　正切公式的活用

例 1　求值：(1)$\tan 105°$；

(2)$\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$；

(3)$\tan 23°+\tan 37°+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°$.

【解】 (1)$\tan 105° = \tan(45° + 60°) = \dfrac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \tan 60°}$

$= \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$.

(2)原式$= \dfrac{\tan 60° - \tan 15°}{1 + \tan 60° \tan 15°} = \tan(60° - 15°) = \tan 45° = 1$.

(3)因为 $\tan 60° = \sqrt{3} = \dfrac{\tan 23° + \tan 37°}{1 - \tan 23° \tan 37°}$,

所以 $\tan 23° + \tan 37° = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 23° \tan 37°$,

所以 $\tan 23° + \tan 37° + \sqrt{3}\tan 23° \tan 37° = \sqrt{3}$.

求解策略

公式 $T_{(\alpha\pm\beta)}$的逆用及变形应用的解题策略

(1)"1"的代换：在 $T_{(\alpha\pm\beta)}$中，如果分子中出现"1"常利用 $1=\tan\frac{\pi}{4}$来代换，以达到化简求值的目的，如 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$；$\frac{\sqrt{3}\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)整体意识：若化简的式子中出现了"$\tan\alpha\pm\tan\beta$"及"$\tan\alpha\cdot\tan\beta$"两个整体，常考虑 $\tan(\alpha\pm\beta)$的变形公式.

跟踪训练 $\dfrac{\tan 75°-\tan 15°}{1+\tan 75°\tan 15°}=$________.

解析：原式 $=\tan(75°-15°)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$