senior high school education

第1课时　向量数量积的概念

预 学 案

共 学 案

预 学 案

一、向量的夹角❶

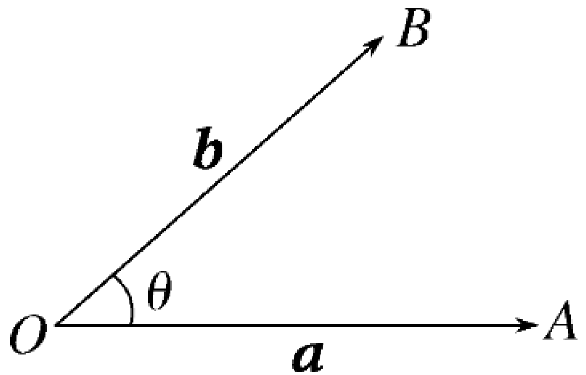
1．定义：已知两个<u>非零向量</u>$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则<u>$\angle AOB=\theta$</u>叫作向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，夹角的取值范围是<u>$0\leqslant\theta\leqslant\pi$</u>．

2．特例：

(1)当$\theta=0$时，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$<u>同向</u>．

(2)当$\theta=\pi$时，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$<u>反向</u>．

(3)当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$<u>垂直</u>，记作<u>$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$</u>．



【即时练习】 若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，则向量$-\boldsymbol{a}$与$-\boldsymbol{b}$的夹角是(　　)

A．60°　　B．120°

C．30°　　D．150°

答案： A

解析： 因为向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，根据向量夹角的几何意义，$-\boldsymbol{a}$与$-\boldsymbol{b}$构成的夹角和$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角相等，故选A.

二、向量的数量积❷

已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，我们把数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(或内积)，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$($\theta$为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角).

规定：零向量与任一向量的数量积为0.

答案 返回导航

【即时练习】　已知平面向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$(　　)

A．4　　　　B．$4\sqrt{3}$

C．8　　　　D．$8\sqrt{3}$

答案：C

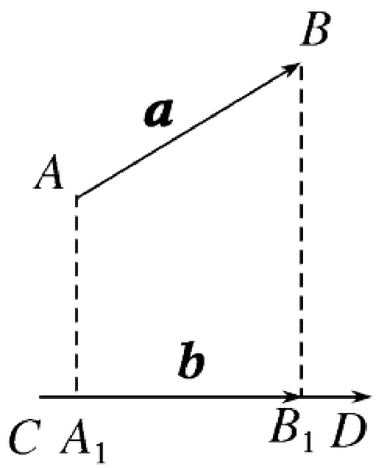
解析：因为平面向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=4$，

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times4\times\frac{1}{2}=8$.

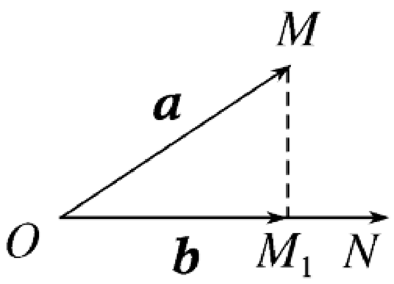
故选C.

三、投影向量❸

1．如图(1)，设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，我们考虑如下的变换：过$\overrightarrow{AB}$的起点$A$和终点$B$，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为$A_1$，$B_1$，得到$\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称上述变换为向量$\boldsymbol{a}$向向量$\boldsymbol{b}$投影，$\overrightarrow{A_1B_1}$叫做向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的____投影向量____.

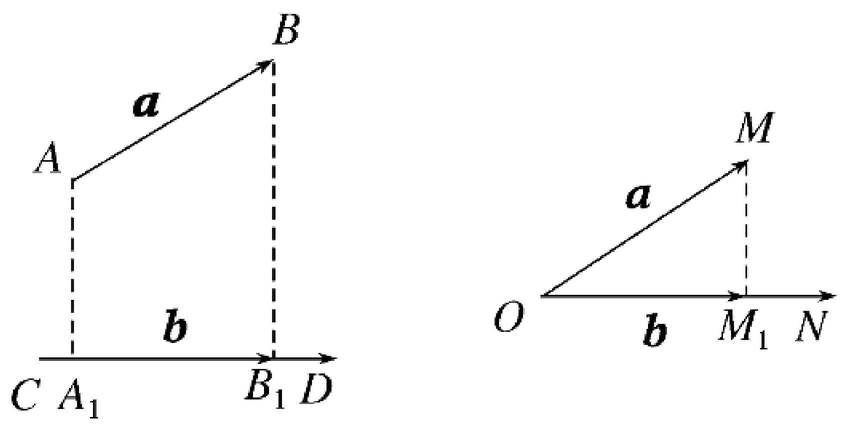


(1)



(2)

答案　返回导航



(1)　　　　　　(2)

2．如图(2)，我们可以在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，过点$M$作直线$ON$的垂线，垂足为$M_1$，则$\overrightarrow{OM_1}$就是向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的<u>投影向量</u>．

3．设与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$，θ之间的关系为$\overrightarrow{OM_1}=$ <u>$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$</u>．

答案　返回导航

【即时练习】 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{e}$为单位向量，它们的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}$上的投影向量是$\underline{\quad \frac{3}{2}\boldsymbol{e} \quad}$.

解析：$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{e}$夹角为锐角，于是$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}$上的投影向量和$\boldsymbol{e}$同向共线，故投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\boldsymbol{e}=\frac{3}{2}\boldsymbol{e}$.

四、向量数量积的性质❹

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是非零向量，它们的夹角是θ，$\boldsymbol{e}$是与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量，则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=$ __$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$__.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ __$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$__.

(3)当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ __$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$__；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ __$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$__. 特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$ __$|\boldsymbol{a}|^2$__或$|\boldsymbol{a}|=$ __$\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$__.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ __$\leqslant$__ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

答案　返回导航

【即时练习】

1．判断正误(正确的画“√”，错误的画“×”)

(1)$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是一个向量．(×)

(2)若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}=0$或$\boldsymbol{b}=0$.(×)

(3)若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.(√)

(4)向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量是一个模等于$|\boldsymbol{a}\cos\theta|$($\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角)，方向与$\boldsymbol{b}$相同或相反的一个向量．(√)

答案 返回导航

2．若$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为(　　)

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

答案：C

解析：设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，

由$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，

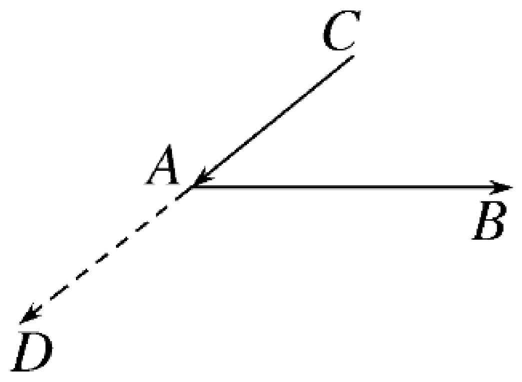
得$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{\frac{3}{2}}{1\times3}=\frac{1}{2}$，

所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.故选C.

解析　答案　返回导航

微点拨❶

按照向量夹角的定义，只有两个向量的起点重合时所对应的角才是两向量的夹角，如图所示，



$\angle BAC$不是向量$\overrightarrow{CA}$与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角，$\angle BAD$才是向量$\overrightarrow{CA}$与向量$\overrightarrow{AB}$的夹角.

微点拨❷

(1)两向量的数量积是个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由夹角的余弦值决定.

(2)两个向量的数量积称为内积，应写成$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，不能写成$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(两向量的外积)，它与代数中数$a$、$b$的乘积$ab$(或$a\cdot b$)是不同的.

(3)在实数中，若$a\neq0$，且$ab=0$，则$b=0$；但是在数量积中，当$\boldsymbol{a}\neq0$时，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$不能推出$\boldsymbol{b}$一定是零向量．因为其中$\cos\theta$有可能为0，即任一与$\boldsymbol{a}$垂直的非零向量$\boldsymbol{b}$，都有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(4)已知实数a、b、$c(b\neq0)$，则$ab=bc\Rightarrow a=c$；但对于向量，该推理就是不正确的，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$D $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.

返回导航

微点拨❸

(1)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量是与向量$\boldsymbol{b}$平行的向量.

(2)如果向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$平行或垂直，向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量具有特殊性.

微点拨❹

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，既可以用来证明两向量垂直，也可以由垂直进行有关计算.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$与$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{|\mathbf{a}|^2}=\sqrt{\mathbf{a}^2}$也用来求向量的模，以实现实数运算与向量运算的相互转化.

(3)用$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$求两向量的夹角，且夹角的取值与$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的符号有关.

设两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则

当$\theta=0$时，$\cos\theta=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

当θ为锐角时，$\cos\theta>0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；

当θ为直角时，$\cos\theta=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

当θ为钝角时，$\cos\theta<0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；

当$\theta=\pi$时，$\cos\theta=-1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

共学案

共学案

返回导航

【学习目标】

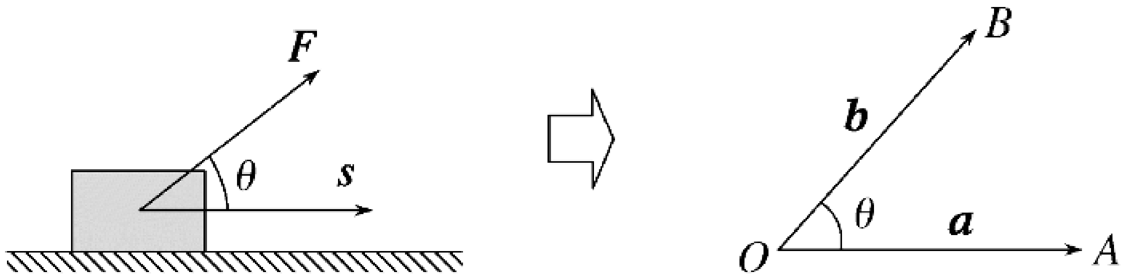
(1)知道向量数量积的物理背景，理解并掌握向量数量积的定义及投影向量.

(2)掌握向量数量积的性质，并会求向量的模与向量的夹角.

返回导航

题型 1　两向量的夹角

【问题探究1】　如图，一个物体在力$\boldsymbol{F}$的作用下发生了位移$\boldsymbol{s}$，那么该力对此物体所做的功为$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，在该公式中，涉及力与位移的夹角，我们要先定义向量的夹角的概念．什么是向量的夹角？



（1）　　　　　　　（2）

提示：已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB=\theta$叫作向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，夹角的取值范围是$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

答案　返回导航

例1　已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是多少？$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角又是多少？

解析： 如图所示，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，且$\angle AOB=60°$．

以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$，

则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

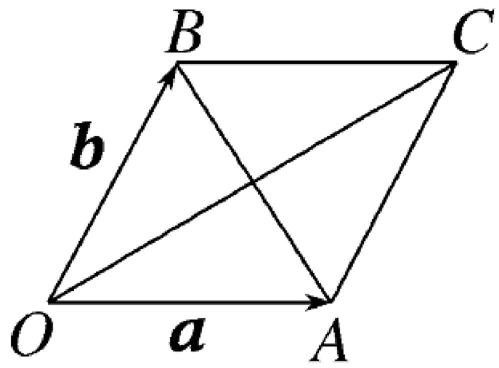
因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，

所以平行四边形$OACB$是菱形，

又$\angle AOB=60°$，

所以$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角为30°，$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角为60°．

即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是30°，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是60°．



答案　返回导航

学霸笔记

(1)求两个向量夹角的关键是利用平移的方法使两个向量起点重合，作两个向量的夹角，按照“一作二证三算”的步骤求出.

(2)特别地，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，$\lambda_1\vec{a}$与$\lambda_2\vec{b}$（λ_1, λ_2是非零常数)的夹角为θ_0，当$\lambda_1\lambda_2<0$时，$\theta_0=180°-\theta$；当$\lambda_1\lambda_2>0$时，$\theta_0=\theta$.

返回导航