摘 要

本文主要研究了 Hom-李代数结构理论和表示理论. 首先, 我们研究了 2n+4 维 Schrödinger 代数上的 Hom- 李代数结构, 确定了 2n+4 维 Schrödinger 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构. 其次, 我们研究了扭 Schrödinger-Virasoro 代数上的 Hom-李代数结构, 确定了扭 Schrödinger-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构. 再者, 我们利用玻色振子构造了一个双参数形变的 Virasoro 代数, 它是一个 Hom-李代数, 我们构造了该代数上的非平凡的 Hopf 代数结构. 最后, 我们构造了双参数形变的 Virasoro 代数上的一类具有一维权空间的不可分解的 Harish-Chandra 模, 并对该类模进行了分类.

关键词: Schrödinger 代数; Hom-李代数; 双参数形变的 Virasoro 代数; Hopf 代数; 中间序列模

目 录

第一章　　引言

1.1　课题背景

无限维李代数在物理学和其他数学分支中有着广泛的应用，尤其是 Virasoro 代数，扭 Schrödinger-Virasoro 代数等李代数受到了大量数学家和物理学家的关注. Hom-李代数是一类满足反对称和 Hom-Jacobi 恒等式的非结合代数, 它源于对形变的 Witt 代数和 Virasoro 代数理论的研究(参见 [15]), 它的定义如下: 一个 Hom-李代数 $(L,[\cdot,\cdot],\sigma)$ 就是一个非结合代数, 其中 σ: $L\to L$ 是线性空间的一个映射, 且满足如下关系式:

$$[x,y]=-[y,x],$$

$$[\sigma(x),[y,z]]+[\sigma(y),[z,x]]+[\sigma(z),[x,y]]=0,$$

其中 $x,y,z\in L$. 2020 年美国《数学评论》和德国《数学文摘》编辑部联合修改 MSC 2010，在 2 月中旬公布的 MSC 2020 中, 新增了 17B61 Hom-Lie and related algebras, 说明越来越多的学者关注 Hom-李代数结构.

确定李代数上的 Hom-李代数结构, 是一件非常有意义的事情. Hartwig 和 Silvestrov 等人在 [15] 中正式提出了 Hom-李代数的概念, 它是一类满足反对称和 Hom-Jacobi 等式的非结合代数. 胡乃红老师在 1999 年首次引进 q-李代数概念, 它实际上就是 Hom-李代数(参见 [16]). 1992 年赵开明在 [42] 中研究了 Virasoro 代数自同构与自同态, 2009 年李小朝在此基础上研究证明了 Virasoro 代数上的 Hom- 李代数结构是平凡的(参见 [28]). 2008 年, 靳全勤和李小朝证明了有限维的复半单李代数上的 Hom- 李代数结构是平凡的(参见 [21]). 2013 年罗栗与曹彬涛在 [4] 中给出了有限维单李超代数的 Hom-李超代数结构是平凡的. 在 [36] 中, 谢文娟, 刘文德利用 GAP 软件, 确定了特征为 0 的代数闭域上有限维半单李代数上的所有 Hom-李代数结构. 由于李代数上的 Hom-李代数结构不一定是乘性的, 所以简化了靳和李在 08 年发表文章, 并修正了三维单李代数 sl_2 结论中的一个错误, 即 sl_2 上有乘性的非平凡的李代数结构. 2011 年, 程永胜和苏育才老师在 [2] 中基于 Loday 和 Pirashvili 的一些工作, 研究了 Hom-Leibniz 代数(Hom-Leibniz 代数是 Leibniz 代数和 Hom-Lie 代数的自然推广)的一些结构理论(例如(余)同调群, 泛中心扩张). 乐露娜, 童文静, 刘东研究了扭 Heisenberg-Virasoro 代数上 Hom-李代数结构(参见 [26]), 确定了它存在非平凡的 Hom-李代数结构. 同年, 在 [5] 中, 陈海波, 赖丹丹与刘东确定了李代数 W(2,2) 上的 Hom-李代

数结构, 主要结论是W(2,2)上没有非平凡的Hom-李代数结构.

众所周知, 无限维Schrödinger 代数和Virasoro代数在数学和物理的许多领域中起着重要的作用. 李代数Schrödinger 代数记为$\mathcal{S}$, 它有一组基$\{e, f, h, x_1, y_1, z\}$ 且它的李括号关系如下:

$$[e,f]=h,[h,e]=2e,[hf]=-2f,$$
$$[h,x_1]=x_1,[h,y_1]=-y_1,[x_1,y_1]=z,$$
$$[e,y_1]=x_1,[f,x_1]=y_1,[z,\mathcal{S}]=0.$$

李代数Virasoro代数Vir有一组基$\{L_m, C\}$, 满足:

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}C,$$

$$[Vir,C]=0,$$

其中$m\in\mathbb{Z}$. 在[6]和[7] 中, 作者研究了Schrödinger代数的单最高权模. 在[8]中, Dubsky对Schrödinger代数上所有单模进行了分类, 它们是带权且有限维权空间. 在[37]中, 唐笑敏等人研究了Schrödinger 代数的导子及其应用. 普遍的和扭的Schrödinger-Virasoro代数都与Schrödinger代数和Virasoro 代数密切相关. 扭Schrödinger-Virasoro 代数$\mathcal{L}$有一组基 $\{L_n, Y_n, M_n, C|n\in\mathbb{Z}\}$ 且满足如下关系式

$$[L_m,L_n]=(n-m)L_{n+m}+\delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}C,$$
$$[L_m,Y_n]=(n-\frac{m}{2})Y_{n+m},$$
$$[L_m,M_n]=nM_{n+m},$$
$$[Y_m,Y_n]=(n-m)M_{n+m},$$
$$[\mathcal{L},C]=[Y_m,M_n]=[M_m,M_n]=0,$$

其中$m,n\in\mathbb{Z}$. 李军波, 苏育才在[27]中研究了扭Schrödinger-Virasoro代数的导子代数和自同构群. 高寿兰, 姜翠波和裴玉峰在[13]研究了扩张的Schrödinger-Virasoro代数的导子, 中心扩张和自同构群, 证明了Schrödinger-Virasoro李代数是无限维完备李代数.

Yang-Baxter量子在理论物理的各类问题中起着重要的作用. 量子群结构有时被称为q-形变的李代数. 数学上它称为Hopf代数(Abe 1980), 但它通常被广泛的称为量子代数. 1998 年胡乃红在[17]上给出了q- 形变的Virasoro代数的量子群结构. 在[1]中,

程永胜和苏育才提出了一种构造 q-形变 Heisenberg-Virasoro 代数的方法, 它是一个 Hom-李代数, 并研究了它的中心扩张及第二上同调群. 最后, 给出了量子形变的 Heisenberg-Virasoro 代数上的非平凡 Hopf 结构. 袁腊梅利用物理学中著名的玻色振子与费米振子实现了李代数 W(2,2) 的 q- 形变, 并在此基础上定义了该李代数的 q- 形变; 进一步确定了李代数 W(2,2) 上的 q- 形变的量子群结构(参见 [38]).

近来, 在数学的领域中, 如何分类所有的 Harish-Chandra 模, 特别是一些与 Virasoro 代数有关的李代数一直以来都是一个受关注的重要问题. 在 [23] 中, Irving Kaplansky 在 1982 年对无中心的 Virasoro 代数的其中一类 Harish-Chandra 模进行了研究, 并在 1985 年对 Virasoro 代数所有不可分解的 Harish-Chandra 模进行了分类(见 [24]). 在 [35] 中, 苏育才和赵开明研究了广义 Virasoro 代数和超 Virasoro 代数, 并进一步对它们的中间序列模进行了分类. 在 [29] 中, 刘克勤给出了一类 Hom 型的 Virasoro (无中心)代数(q 不是单位根)的 Harish-Chandra 模, 并在 1995 年给出了它的所有不可分解的 Harish-Chandra 模的分类(见 [30]). 1997 年张贺春关于 Virasoro 代数构造了一类具有无限维权空间的不可分解模, 即 Virasoro 代数上最高权值模与中间级数模的张量积(见 [42]). 陈洪佳, 郭向前和赵开明在此基础上确定了这些张量积是单的充要条件(见 [3]). 2003 年张子龙, 张更生和贾雨亭构造了双参数形变的 Harish-Chandra 模, 并证明了一个分类定理(见 [40]). 2007 年蒋启芬和姜翠波研究了扭 Heisenberg 代数不可分解模的显式构造并给出了 Virasoro 代数和全环面李代数的表示(见 [22]). 在 [31] 中, 2008 年苏育才等人证明了 Schrödinger-Virasoro 代数上具有有限权空间的不可约权模是最高/最低权模或一致有界模. 进而完全确定了这些代数上的中间序列的不可分解模. 赵开明和吕仁才对扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的所有 Harish-Chandra 模进行了分类, 但是计算量大且计算的内容过于复杂(见 [32]). 在 [33] 中, 2010 年刘东提供了一种统一的方法来分类与 Virasoro 代数相关的几类李代数上的所有 Harish-Chandra 模. 2013 年郭向前等人在 [14] 中得到了无中心 Virasoro 代数上的两类新的不可约模, 这些模通常不是权模或 Whittaker 模. 2015 年张秀福证明了具有无限维权空间的 Ramond 代数上的单权模的支集与权格重合, 并且非平凡权空间与模的奇数部分或偶数部分的所有交都是无限维的(见 [41]).

1.2 本论文的主要内容

文章主要研究了两类李代数上的 Hom-李代数结构及双参数形变的 Virasoro 代数的量子群结构及中间序列模. 本文的主要内容如下:

在第二章中, 我们研究了 2n+4 维 Schrödinger 代数上的 Hom-李代数结构, 确定了 2n+4 维的 Schrödinger 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构. 主要结果为:

定理2.2.1 Schrödinger 代数 $\mathcal{S}(n)$ 上的 Hom-李代数结构有以下形式:

$$\sigma(e) = ae, \sigma(f) = af, \sigma(h) = ah,$$
$$\sigma(x_i) = ax_i, \sigma(y_i) = ay_i,$$
$$\sigma(z) = bz,$$

其中 $1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{Z}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$.

注: $\mathcal{S}(n)$ 的 Hom-李代数结构是非平凡的, 它是一种与平凡很接近的非平凡. 若$a = b$, 则它是平凡的.

推论2.2.3 所有有非乘性 Hom-李代数结构的 $\mathcal{S}(n)$ 是非平凡的.

在第三章中, 我们研究了扭 Schrödinger-Virasoro 代数上的 Hom- 李代数结构, 确定了扭 Schrödinger-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构. 主要结果为:

推论3.2.4 对于扭 Schrödinger-Virasoro 代数 $\tilde{\mathcal{L}}$, 若 $(\tilde{\mathcal{L}}, \sigma)$ 是一个李代数, 我们可知:

$$\sigma(L_n) = L_n + dM_n,$$
$$\sigma(M_n) = M_n,$$
$$\sigma(Y_n) = Y_n,$$
$$\sigma(C) = C, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

其中 $d \in \mathbb{C}$. 即扭 Schrödinger-Virasoro 代数 $\tilde{\mathcal{L}}$ 上存在非平凡的 Hom-李代数结构.

在第四章中, 我们利用 E. Olivier 等人在 [11] 中介绍的 Hom- 李代数 $V_{p,q}$ 的代数关系和玻色振子构造了双参数形变的 Virasoro 代数的包络代数, 并且得到了量子变形的 Virasoro 代数上非平凡的 Hopf 结构. 主要结果为:

引理4.2.4 存在唯一的代数同态 Δ: $\mathcal{U}_{p,q} \to \mathcal{U}_{p,q} \times \mathcal{U}_{p,q}$ 满足

$$\Delta(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \Delta(\mathcal{T}^{-1}) = \mathcal{T}^{-1} \otimes \mathcal{T}^{-1}, \tag{1-1}$$

$$\Delta(L_n) = L_n \otimes \mathcal{T}^n + \mathcal{T}^n \otimes L_n, \tag{1-2}$$

$$\Delta(C) = C \otimes 1 + 1 \otimes T, \tag{1-3}$$

$$\epsilon(L_n) = \epsilon(C) = 0, \tag{1-4}$$

$$S(L_n) = -\mathcal{T}^{-n} L_n \mathcal{T}^{-n}, \tag{1-5}$$

$$S(C) = -C. \tag{1-6}$$

在第五章中, 我们利用第四章中得到的双参数形变的Virasoro代数的包络代数, 构造了双参数形变的Virasoro代数上的一类Harish-Chandra模, 然而在计算的过程中, 我们发现第四章中得到的双参数形变的Virasoro代数的包络代数与张子龙等人在[40] 中给出的双参数形变的Virasoro代数的包络代数一样, 且张子龙等人给出了当L_{-1} 和L_1 不零化任何向量时模的分类定理, 所以本章只对此情况做简单说明, 主要是给出在L_{-1} 和L_1零化的情况下的中间序列模的分类. 主要结果为:

定理5.2.6 设q非单位根, 若V是一个一维权空间下不可分解的Harish-Chandra $V_{p,q}$-模, 则V与下列之一的$V_{p,q}$-模同构:

$$V_{p,q}(a,b): L_n(v_j) = (p^{-k}[k]_{p,q} - ap^{-k}q^k - bp^{-k-j}q^k[j]_{p,q})v_{n+j},$$

$$V_{p,q}(\alpha): \begin{cases} L_n(v_j) = p^{-n-j-1}[n+j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j \neq -1, \\ L_n(v_{-1}) = (-q^n[-n]_{p,q} + [-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}p^{-n}q^n\alpha)v_{n-1}, & j = -1. \end{cases}$$

$$V'_{p,q}(\alpha'): \begin{cases} L_n(v_j) = p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j \neq -n, \\ L_n(v_{-n}) = (p^n[-n]_{p,q} + p^nq^{-n}[-n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha')v_0, & j = -n. \end{cases}$$

$$V_{p,q}(\beta): \begin{cases} L_n(v_j) = -q^{n+j-1}[-n-j+1]_{p,q}v_{n+j}, & j \neq 1, \\ L_n(v_1) = (-q^n[-n]_{p,q} + p^{-n}q^n[n]_{p,q}[-n+1]_{p,q}\alpha)v_{n+1}, & j = 1. \end{cases}$$

$$V'_{p,q}(\beta'): \begin{cases} L_n(v_j) = p^{-j}[j]_{p,q}v_{n+j}, & j \neq -n, \\ L_n(v_{-n}) = (p^n[-n]_{p,q} + p^nq^{-n}[n]_{p,q}[n+1]_{p,q}\alpha')v_0, & j = -n. \end{cases}$$

其中$\alpha, \beta, \alpha', \beta', a, b \in \mathbb{C}$.

第二章　2n+4维 Schrödinger 代数 $\mathcal{S}(n)$ 上的 Hom-李代数结构

在本章中, 我们研究了 2n+4 维 Schrödinger 代数上 Hom-李代数的结构, 确定了 2n+4 维的 Schrödinger 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构.

2.1　预备知识

首先, 我们回顾一下所需要的预备知识.

定义 2.1.1 Schrödinger 代数 $\mathcal{S}(n)$ 有一组 $\mathbb{C}$-基 $\{e, f, h, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z\}$, 且满足以下关系式:

$$\begin{aligned} &[e, f] = h, [h, e] = 2e, [h, f] = -2f, \\ &[h, x_i] = x_i, [h, y_i] = -y_i, [x_i, y_i] = z, \\ &[e, y_i] = x_i, [f, x_i] = y_i, [z, \mathcal{S}] = 0, \end{aligned} \tag{2-1}$$

其中 $1 \leq i \leq n$, $i \in \mathbb{Z}^*$.

当 $n = 1$ 时, 我们可以得到 Schrödinger 代数 $\mathcal{S}(1)$ 且它有一组 $\mathbb{C}$- 基 $\{e, f, h, x_1, y_1, z\}$, Schrödinger 代数 $\mathcal{S}(1)$ 可被表示成两个子代数半直积的形式:

$$\mathcal{S} = \mathcal{H} \rtimes sl_2,$$

其中: Heisenberg 子代数 $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{x_1, y_1, z\}$ 和 $sl_2 = \mathrm{span}\{e, f, h\}$.

Hartwig 等人在 [15] 中, 介绍了一类满足反对称和 Hom-Jacobi 恒等式的非结合代数, 即 Hom-李代数的定义.

定义 2.1.2 一个 Hom-李代数 $(L, [\cdot,\cdot], \sigma)$ 就是一个非结合代数, 其中 σ: $L \to L$ 是线性空间的一个映射, 且满足如下关系式:

(1) $[x, y] = -[y, x]$,

(2) $[\sigma(x), [y, z]] + [\sigma(y), [z, x]] + [\sigma(z), [x, y]] = 0$,

$\forall x, y, z \in L$. 若代数 L 上的 Hom-李代数结构都是平凡的, 即 $\sigma = k \circ id$, $k \in \mathbb{C}$.

2.2 2n+4维Schrödinger 代数$\mathcal{S}(n)$上的Hom-李代数结构

定理 2.2.1 Schrödinger代数$\mathcal{S}(n)$ 上的Hom-李代数结构有以下形式:

$$\begin{aligned}&\sigma(e)=ae,\sigma(f)=af,\sigma(h)=ah,\\&\sigma(x_i)=ax_i,\sigma(y_i)=ay_i,\\&\sigma(z)=bz,\end{aligned}$$

其中$1\leq i\leq n, i\in\mathbb{Z}^*$, $a,b\in\mathbb{C}$.

证明 假设

$$\begin{aligned}&\sigma(e)=l_1e+l_2f+l_3h+\ldots+l_{2n+2}x_n+l_{2n+3}y_n+l_{2n+4}z,\\&\sigma(f)=m_1e+m_2f+m_3h+\ldots+m_{2n+2}x_n+m_{2n+3}y_n+m_{2n+4}z,\\&\sigma(h)=k_1e+k_2f+k_3h+\ldots+k_{2n+2}x_n+k_{2n+3}y_n+k_{2n+4}z,\\&\sigma(x_i)=a_{1,i}e+a_{2,i}f+a_{3,i}h+\ldots+a_{2n+2,i}x_n+a_{2n+3,i}y_n+a_{2n+4,i}z,\\&\sigma(y_i)=b_{1,i}e+b_{2,i}f+b_{3,i}h+\ldots+b_{2n+2,i}x_n+b_{2n+3,i}y_n+b_{2n+4,i}z,\\&\sigma(z)=t_1e+t_2f+t_3h+\ldots+t_{2n+2}x_n+t_{2n+3}y_n+t_{2n+4}z.\end{aligned}$$

显然

$$\sigma(e,f,h,x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n,z)=(e,f,h,x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n,z)\mathbf{M},\tag{2-2}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}l_1&m_1&k_1&a_{1,1}&b_{1,1}&a_{1,2}&b_{1,2}\ldots a_{1,n}&b_{1,n}&t_1\\l_2&m_2&k_2&a_{2,1}&b_{2,1}&a_{2,2}&b_{2,2}\ldots a_{2,n}&b_{2,n}&t_2\\l_3&m_3&k_3&a_{3,1}&b_{3,1}&a_{3,2}&b_{3,2}\ldots a_{3,n}&b_{3,n}&t_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\l_{2n+3}&m_{2n+3}&k_{2n+3}&a_{2n+3,1}&b_{2n+3,1}&a_{2n+3,2}&b_{2n+3,2}\ldots a_{2n+3,n}&b_{2n+3,n}&t_{2n+3}\\l_{2n+4}&m_{2n+4}&k_{2n+4}&a_{2n+4,1}&b_{2n+4,1}&a_{2n+4,2}&b_{2n+4,2}\ldots a_{2n+4,n}&b_{2n+4,n}&t_{2n+4}\end{bmatrix}.$$

从$\{e,f,h,x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n,z\}$ 中任意取三个基元素, 然后我们可以分为以下八种情况来计算.

情况I

将e,f,h代到Hom-Jacobi恒等式, 得到

$$[\sigma(e),[f,h]]+[\sigma(f),[h,e]]+[\sigma(h),[e,f]]=0,$$