3.2 基本不等式

【考点梳理】

考点一： 基本不等式

1．如果 $a>0$，$b>0$，$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当 $\underline{a=b}$ 时，等号成立．

其中$\dfrac{a+b}{2}$叫做正数 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$叫做正数 a，b 的几何平均数．

2．变形：$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，$a$，$b\in\mathbf{R}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，a，b 都是正数，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

考点二： 用基本不等式求最值

用基本不等式$\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$求最值应注意 x，y 是<u>正数</u>；

(①如果 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

②如果 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\dfrac{1}{4}S^2$.

【题型归纳】

题型一：由基本不等式比较不等式的大小

1．已知$a>0$，$b>0$，若$ab=4$，则下列不等式一定成立的是（　）

A．$a^2+b^2>8$　　B．$a+b\le 4$　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 1$　　D．$a+2b\ge 8$

2．对于$s<0$，$t<0$，下列不等式中不成立的是（　）

A．$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\ge \frac{2}{\sqrt{st}}$　　B．$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\ge 2$

C．$st\le \left(\frac{s+t}{2}\right)^2$　　D．$\left(\frac{s+t}{2}\right)^2\le \frac{s^2+t^2}{2}$

3．已知a，b均为正数，且$a+b\le 4$，则（　）

A．$\sqrt{ab}\ge 2$　　B．$\frac{1}{ab}\ge \frac{1}{2}$

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 1$　　D．$a^2+b^2\ge 4$

题型二：基本不等式求积的最大值

4．已知$a>0$，$b>0$且$2a+5b=10$，则ab的最大值为（　）

A．2　　B．5　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{5}{2}$

5．若$x\in(0,4)$,则$x(4-x)$的最大值是（　）

A．4　　B．1　　C．0　　D．不存在

6．$\sqrt{(3-a)(a+6)}\,(-6<a<3)$的最大值为（　）

A．9　　B．$\frac{9}{2}$　　C．3　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

题型三：基本不等式求和的最小值

7．已知函数$y=x-4+\frac{9}{x+1}(x>-1)$，当$x=a$时，$y$取得最小值$b$，则$a+b=$（　）

A．-3　　B．2　　C．3　　D．8

8．若$x>1$，则函数$y=x+\frac{2x+2}{x-1}$的最小值为（　）

A．4　　B．5　　C．7　　D．9

9．当$x>0$时，函数$y=\frac{3+x+x^2}{1+x}$的最小值为（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}-1$

C．$2\sqrt{3}+1$　　D．4

题型四：二次商式的最值问题（分离常数法）

10．已知正实数 x，则 $y=\frac{-2x^2+x-4}{x}$ 的最大值是（　）

A．1　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$-4\sqrt{2}$　　D．$1-4\sqrt{2}$

11．已知 $x<3$，则 $y=\frac{x^2-3x+4}{x-3}$ 的最大值是（　）

A．-1　　B．-2　　C．2　　D．7

12．已知正实数 a,b 满足 $\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b+1}=1$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值为（　）

A．6　　B．8　　C．10　　D．12

题型五：基本不等式“1”的妙用

13．已知 x，y 都是正数，若 $x+y=2$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为（　）

A．$\frac{7}{4}$　　B．$\frac{9}{2}$　　C．$\frac{13}{4}$　　D．1

14．若实数 m，$n>0$，满足 $2m+n=1$，以下选项中正确的有（　）

A．mn 的最小值为 $\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

C．$\frac{2}{m+1}+\frac{9}{n+2}$ 的最小值为 5　　D．$4m^2+n^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

15．已知 $a>0$，$b>0$ 且 ab=1，不等式 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{m}{a+b}\geq 4$ 恒成立，则正实数 m 的取值范围是（　　）

A．m≥2　　B．m≥4　　C．m≥6　　D．m≥8

题型六：基本不等式的恒成立求参数问题

16．已知实数 $x,y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $2x+y>m^2-8m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　）

A．$(-9,1)$　　B．$(-1,9)$　　C．$[-1,9]$　　D．$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$

17．已知 a＞0，b＞0，若不等式 $\frac{m}{3a+b}\leq\frac{a+3b}{ab}$ 恒成立，则 m 的最大值为（　）

A．4　　B．16　　C．9　　D．3

18．函数 $y=x^2+\frac{4}{x^2}-2(-1<x<0)$ 的值域（　）

A．$x\geq 2$　　B．$y\geq 2$　　C．$\{y|y\geq 3\}$　　D．$\{y|y>3\}$

题型七：对勾函数最值问题

19．代数式 $\frac{x^2+k+1}{\sqrt{x^2+k}}$ 的最小值是（　）.

A．4　　　　　　　　B．2　　　　　　　　C．k　　　　　　　　D．不能确定

20．已知$x<0$，则函数$y=x+\frac{1}{x}-1$的最大值为（　　）

A．-1　　　　　　　　B．-3　　　　　　　　C．1　　　　　　　　D．0

21．下列命题正确的是（　　）

A．函数$\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$的最小值是2．

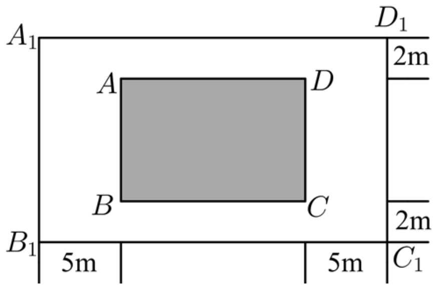
B．若$a,b\in\mathbf{R}$，且$ab>0$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

C．函数$y=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$的最小值是2

D．函数$y=2-3x-\frac{4}{x}\left(x>0\right)$的最小值是$\frac{1}{2}-4\sqrt{3}$

题型八：基本不等式的实际问题的应用

22．某大型广场计划进行升级改造．改造的重点工程之一是新建一个矩形音乐喷泉综合体$A_1B_1C_1D_1$，该项目由矩形核心喷泉区$ABCD$（阴影部分）和四周的绿化带组成．规划核心喷泉区$ABCD$的面积为$1000\ \mathrm{m}^2$，绿化带的宽分别为2m和5m（如图所示）．当整个项目$A_1B_1C_1D_1$占地面积最小时，核心喷泉区的边BC的长度为（　　）



A．20m　　　　　　　　B．50m　　　　　　　　C．$10\sqrt{10}$ m　　　　　　　　D．100m

23．2020年初，新冠肺炎疫情袭击全国，对人民生命安全和生产生活造成严重影响．在党和政府强有力的抗疫领导下，我国控制住疫情后，一方面防止境外疫情输入，另一方面逐步复工复产，减轻经济下降对企业和民众带来的损失．为降低疫情影响，某厂家拟在2020年举行某产品的促销活动，经调查测算，该产品的年销售量（即该厂的年产量）x万件与年促销费用m万元$(m\geq 0)$满足$x=4-\frac{k}{m+1}$（k为常数），如果不搞促销活动，则该产品的年销售量只能是2万件．已知生产该产品的固定投入为8万元，每生产一万件该产品需要再投入16万元，厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的1.5倍（此处每件产品年平均成本按$\frac{8+16x}{x}$元来计算）

(1)将2020年该产品的利润y万元表示为年促销费用m万元的函数；

(2)该厂家2020年的促销费用投入多少万元时，厂家的利润最大？最大利润是多少？

题型九：基本不等式的综合应用

24．（1）已知$x>5$，求$\frac{4}{x-5}+x$的最小值；

（2）已知x，y是正实数，且$2x+3y=4$，求xy的最大值.

25．已知a,b,c均为正实数．

(1)求证：$\frac{2b+3c-a}{a}+\frac{a+3c-2b}{2b}+\frac{a+2b-3c}{3c}\geq 3$．

(2)若$a+b+c=3$，证明：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq \frac{3}{2}$．

26．已知a，b，c均为正实数，求证：

(1)$a+b+c\geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$；

(2)$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq \sqrt{2}\left(a+b+c\right)$．

【双基达标】

一、单选题

27．下列的四个不等式中不一定成立的有（　）

A．$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$　　　　B．a（$1-a$）$\leq \frac{1}{4}$

C．$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$　　　　D．（a^2+b^2）（c^2+d^2）$\geq$（$ac+bd$）^{2}

28．已知$0<x<2$，则$y=x\sqrt{4-x^2}$的最大值为（　　）

A．2　　B．4　　C．5　　D．6

29．$y=\frac{x^2-x+4}{x}(x>0)$的最小值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

30．已知 x，y 为非零实数，则下列不等式不恒成立的是（　）

A．$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$　　B．$\frac{x^2+y^2}{xy} \ge 2$　　C．$\left|x+\frac{1}{x}\right| \ge 2$　　D．$x^2+y^2 \ge 2|xy|$

31．若命题"对任意的 $x \in (0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}-m>0$ 恒成立"为假命题，则 m 的取值范围为（　）

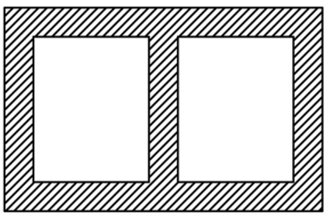
A．$[2,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(-\infty,2)$

32．已知 $a>0$，用基本不等式求 $9a+\frac{1}{a}$ 的最小值时，有 $9a+\frac{1}{a} \ge 2\sqrt{9a\cdot\frac{1}{a}}$，则取得最小值时 a 的值为（　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

33.（1）已知 $x>2$，求 $y=\frac{9}{x-2}+x$ 的最小值；（2）已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+y+xy=3$，求 $x+y$ 的最小值．

34．物流公司 A 拟在某城市港口建立某产品进口供货基地，该物流公司对周边商户、居民社区、道路、河道和水库、地区气候等信息进行调研后．拟在一块矩形空地上建造大型仓库（如图所示）进行产品的储存．已知需要建造的两个仓库占地面积（图示中空白部分）均为 40000 平方米，仓库四周及中间（阴影部分）硬化为水泥路面，方便货物运输．



(1)若矩形仓库的长比宽至少多 90 米，但不超过 300 米，求仓库宽的取值范围；

(2)若水泥路面宽度均为 50 米，求建造仓库与水泥路面所需要矩形空地的最小占地面积．

【高分突破】

一、单选题

35．已知正数 x、y 满足 $(x-2)(y-1)=2$，若不等式 $x+2y>m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(8,+\infty)$　　B．$(4,+\infty)$　　C．$(-\infty,8)$　　D．$(-\infty,4)$

36．下列结论正确的是（　）

A．当 $x<2$ 时，$x+\frac{1}{x-2} \ge 4$　　B．当 $x>0$ 时，$\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}} \ge 4$

C．当 $x \ge 2$ 时，$x+\frac{2}{x}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$　　D．当 $a>0$ 时，$a+\frac{1}{a+1}$ 的最小值为 1

37．权方和不等式作为基本不等式的一个变化，在求二元变量最值时有很广泛的应用，其表述如下：设 a，b，x，y>0，则 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 时等号成立．根据权方和不等式，函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}(0<x<\frac{1}{2})$ 的最小值为（　）

A．16　　　　B．25　　　　C．36　　　　D．49

38．已知正实数 a、b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=m$，若 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$ 的最小值为 4，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$\{2\}$　　　　B．$[2,+\infty)$　　　　C．$(0,2]$　　　　D．$(0,+\infty)$

39．已知正数 x，y 满足 $\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{3x+y}=1$，则 $x+y$ 的最小值（　）

A．$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$　　　　B．$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$　　　　C．$\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$　　　　D．$\frac{3+\sqrt{2}}{8}$

二、多选题

40．设正实数 x，y 满足 $2x+y=1$，则（　）

A．xy 的最大值是 $\frac{1}{4}$

B．$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 9

C．$4x^2+y^2$ 最小值为 $\frac{1}{2}$

D．$\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 最大值为 2

41．设正实数 m、n 满足 $m+n=2$，则下列说法正确的是（　）

A．$\frac{n}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为 3

B．mn 的最大值为 1

C．$\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 的最小值为 2

D．m^2+n^2 的最小值为 2

42．已知 x，y 是正实数，则下列选项正确的是（　）

A．若 $x+y=2$，则 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 有最小值 3

B．若 $x+y=3$，则 $x(y+1)$ 有最大值 5

C．若 $4x+y=1$，则 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

D．$\frac{x}{4}+\frac{y^2}{x}+\frac{1}{y}$ 有最小值 2

43．下列说法正确的是(　)

A．已知 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $x(1-2x)$的最大值为 $\frac{1}{8}$

B．当 $x<\frac{4}{3}$ 时，$y=3x-1+\frac{1}{3x-4}$ 的最大值是 1

C．若 $1<a<3$，$2<b<5$，则 $2a-3b+1$ 的取值范围是 $(-4,1)$

D．若 $M=2a(a-2)+7$，$N=(a-2)(a-3)$，则 $M<N$

44．下列说法正确的有（　）

A．若 $x<\frac{1}{2}$，则 $2x+\frac{1}{2x-1}$ 的最大值是 -1

B．若x，y，z都是正数，且$x+y+z=2$，则$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{y+z}$的最小值是 3

C．若$x>0$，$y>0$，$x+2y+2xy=8$，则$x+2y$的最小值是 2

D．若实数x，y满足$xy>0$，则$\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{x+2y}$的最大值是$4-2\sqrt{2}$

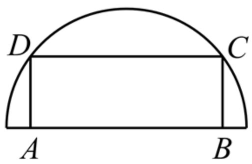
三、填空题

45．已知$x>1$，$\frac{x^2-2x+3}{x-1}$的最小值为____________.

46．若正数 a，b 满足$2a+b=1$，则$\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}$的最小值是__.

47．已知正数a,b满足$a+b=1,c\in\mathbf{R}$，则$\frac{3a}{bc^2+b}+\frac{1}{abc^2+ab}+2c^2$的最小值为__________.

48．如图，在半径为4cm 的半圆形（O 为圆心）铁皮上截取一块矩形材料 $ABCD$，其顶点 A，B 在直径上，顶点 C，D 在圆周上，则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为__________cm^2；



四、解答题

49．（1）已知命题p：$\exists x\in\mathrm{R}$，$x^2+(m-2)x+1=0$成立，命题q：对$\forall a,b\in(0,+\infty)$，$b=\frac{2a}{a-1}$，都有$m+2\sqrt{2}\le a(b-1)$成立.若命题$p$和命题$q$有且仅有一个命题是真命题，求实数$m$的取值范围.

（2）已知$a,b,c>0$，$a+b+c=3$，求证：$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

50．国内某博物馆正式开幕．为方便顾客，在休息区$200\mathrm{m}^2$的矩形区域内布置了如图所示的休闲区域（阴影部分），已知下方是两个相同的矩形．在休闲区域四周各留下 1m 宽的小路，若上面矩形部分与下方矩形部分高度之比为 1：2．问如何设计休息区域，可使总休闲区域面积最大?

51．已知集合$D=\left\{(x_1,x_2)\middle|x_1+x_2=1,x_1>0,x_2>0\right\}$.

(1)设$u=x_1x_2$，求u的取值范围；

(2)对任意$\left(x_1,x_2\right)\in D$，证明：$\left(x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{x_2}\right)\le\dfrac{9}{4}$.

参考答案：

1．C

【分析】已知$a>0$，$b>0$，且$ab=4$，由$a^2+b^2\geq 2ab$判断A选项是否一定成立；由$ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$判断B选项是否一定成立;由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$判断C选项是否一定成立;由$a+2b=a+2\times\frac{4}{a}=a+\frac{8}{a}$结合基本不等式判断D选项是否一定成立;

【详解】$\because a>0$，$b>0$，且$ab=4$ $\therefore a^2+b^2\geq 2ab=8$当且仅当$a=b=2$时取等号，故A不一定成立；

$\because a>0$，$b>0$ $\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$ $\therefore ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$ $\because ab=4$ $\therefore a+b\geq 4$当且仅当$a=b=2$时取等号，故B不一定成立；

$\because a>0$，$b>0$ $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$ $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 1$当且仅当$a=b=2$时取等号，故C一定成立；

$\because a>0$，$b>0$且$ab=4$ $\therefore a+2b=a+2\times\frac{4}{a}=a+\frac{8}{a}\geq 2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ $\therefore a+2b\geq 4\sqrt{2}$当且仅当$\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$时取等号，故D不一定成立；

故选：C

2．A

【分析】利用基本不等式即可求解.

【详解】对于A，令$a=-\frac{1}{s}$，$b=-\frac{1}{t}$，

则$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=-a-b=-(a+b)\leq-2\sqrt{ab}=-\frac{2}{\sqrt{st}}$，当且仅当$s=t$取等号，不成立；

对于B，$\frac{s}{t}>0$, $\frac{t}{s}>0$，所以$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\geq 2$，当且仅当$s=t$取等号，成立；

对于C，$st=(-s)(-t)\leq\left(\frac{-s-t}{2}\right)^2=\left(\frac{s+t}{2}\right)^2$，当且仅当$s=t$取等号，成立；

对于D，$\left(\frac{s+t}{2}\right)^2=\frac{s^2+t^2+2st}{4}=\frac{s^2+t^2}{4}+\frac{1}{2}st\leq\frac{s^2+t^2}{2}$，

当且仅当$s=t$取等号，成立.

故选：A

3．C

【分析】由基本不等式判断C．ABD可通过举反例说明、

【详解】正数a,b满足$a+b\leq 4$，若$a=b=1$满足已知，但$\sqrt{ab}=1<2$，$a^2+b^2=2<4$，若$a=b=2$满足已知，但$\frac{1}{ab}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$，

$a>0,b>0$，则

$4\geqslant a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，所以$ab\leq 4$，$\sqrt{ab}\leq 2$，所以$a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}=ab$，

$\frac{a+b}{ab} \geq 1$，即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 1$，当且仅当$a=b=2$时等号成立.

故选：C.

4．D

【分析】直接由基本不等式求解即可.

【详解】因为$2a+5b=10 \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$，所以$ab \leq \frac{5}{2}$，当且仅当$a=\frac{5}{2}, b=1$时，等号成立.

所以ab的最大值为$\frac{5}{2}$.

故选：D

5．A

【分析】利用基本不等式计算可得；

【详解】解：因为$x \in (0,4)$，所以$4-x \in (0,4)$，所以$x(4-x) \leq \left[\frac{x+(4-x)}{2}\right]^2=4$，当且仅当$x=4-x$，即$x=2$时取等号；

故选：A

6．B

【分析】利用基本不等式求目标式的最大值即可，注意等号成立的条件.

【详解】$\because -6<a<3$，则$3-a>0$，$a+6>0$.

$\therefore$由基本不等式得：$\sqrt{(3-a)(a+6)} \leq \frac{3-a+a+6}{2}=\frac{9}{2}$，当且仅当$3-a=a+6$，即$a=-\frac{3}{2}$时等号成立.

故选：B.

7．C

【分析】通过题意可得$x+1>0$，然后由基本不等式即可求得答案

【详解】解：因为$x>-1$，所以$\frac{9}{x+1}>0, x+1>0$，

所以$y=x-4+\frac{9}{x+1}=x+1+\frac{9}{x+1}-5 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{9}{x+1}}-5=1$,

当且仅当$x+1=\frac{9}{x+1}$即$x=2$时，取等号，

所以y的最小值为1，

所以$a=2, b=1$，所以$a+b=3$，

故选：C

8．C

【分析】利用基本不等式计算可得；

【详解】解：因为$x>1$，所以$x-1>0$，

所以$y=x+\frac{2x+2}{x-1}=x+\frac{2(x-1)+4}{x-1}$

$=x+2+\frac{4}{x-1}=\left(x-1\right)+\frac{4}{x-1}+3\geq 2\sqrt{\left(x-1\right)\cdot\frac{4}{x-1}}+3=7$，

当且仅当$\left(x-1\right)=\frac{4}{x-1}$，即$x=3$时取等号，

所以函数$y=x+\frac{2x+2}{x-1}$的最小值为7；

故选：C

9．B

【分析】使用变量分离，将$y=\frac{3+x+x^2}{1+x}$化为$y=\frac{3+x+x^2}{1+x}=\frac{3}{1+x}+x=\frac{3}{1+x}+\left(x+1\right)-1$，使用基本不等式解决.

【详解】因为$x>0$，所以$y=\frac{3+x+x^2}{1+x}=\frac{3}{1+x}+x=\frac{3}{1+x}+\left(x+1\right)-1\geq 2\sqrt{\frac{3}{1+x}\cdot\left(x+1\right)}-1=2\sqrt{3}-1$，当且仅当$\frac{3}{1+x}=x+1$，即$x=\sqrt{3}-1$时，等号成立.

故选：B.

10．D

【分析】利用基本不等式可求$2x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{2}$，当且仅当$x=\sqrt{2}$时等号成立，化简已知即可求解.

【详解】解：因为$y=\frac{-2x^2+x-4}{x}=-\left(2x+\frac{4}{x}\right)+1$，

又因为$x>0$，所以$\frac{4}{x}>0$，

所以$2x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{2}$，当且仅当$2x=\frac{4}{x}$时，即$x=\sqrt{2}$时等号成立，

所以$y=\frac{-2x^2+x-4}{x}=-\left(2x+\frac{4}{x}\right)+1\leq -4\sqrt{2}+1$，

即y的最大值是$1-4\sqrt{2}$.

故选：D.

11．A

【分析】化简$y=\frac{x^2-3x+4}{x-3}$ 为$y=(x-3)+\frac{4}{x-3}+3$，利用均值不等式求解即可.

【详解】$y=\frac{x^2-3x+4}{x-3}=\frac{(x-3)^2+3(x-3)+4}{x-3}$

$=(x-3)+\frac{4}{x-3}+3$

$\because x<3$，

$\therefore x-3<0$，$\frac{4}{x-3}<0$，

$\therefore (x-3)+\frac{4}{x-3}=-\left[(3-x)+\frac{4}{3-x}\right]\leq -2\sqrt{(3-x)\times\frac{4}{3-x}}=-4$

当且仅当$x-3=\frac{4}{x-3}$，即$x=1$时，等号成立，

所以$y=\frac{x^2-3x+4}{x-3}$ 的最大值为$-4+3=-1$

故选：A

12．B

【分析】令$a+2b=a+b+b+1-1$，用$a+b+b+1$分别乘$\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b+1}=1$两边再用均值不等式求解即可.

【详解】因为$\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b+1}=1$，且$a,b$为正实数

所以$a+b+b+1=(a+b+b+1)(\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b+1})=4+\frac{a+b}{b+1}+\frac{4(b+1)}{a+b}+1$

$\geq 5+2\sqrt{\frac{a+b}{b+1}\times\frac{4(b+1)}{a+b}}=9$，当且仅当$\frac{a+b}{b+1}=\frac{4(b+1)}{a+b}$即$a=b+2$时等号成立.

所以$a+2b+1\geq 9,a+2b\geq 8$.

故选：B.

13．B

【分析】利用基本不等式求解.

【详解】因为$x+y=2$，所以$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\left(1+4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)$.

因为x，y都是正数，由基本不等式有：$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，

所以$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{2}\left(1+4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)\geq\frac{9}{2}$，当且仅当$\begin{cases}y=2x,\\x+y=2,\end{cases}$

即$\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{4}{3}\end{cases}$时取“=”．故A，C，D错误.

故选：B.

14．D

【分析】直接利用均值不等式判断A；根据“1”的代换的方法判断B；整理$2m+n=1$为 $2(m+1)+(n+2)=5$，利用“1”的代换的方法判断C；对$2m+n=1$作平方处理，结合均值不等式判断D.

【详解】$\because$实数m，$n>0$，$\therefore 2m+n=1\geq 2\sqrt{2mn}$，

整理得$mn\leq\frac{1}{8}$，当且仅当$\begin{cases}n=\frac{1}{2}\\m=\frac{1}{4}\end{cases}$时取“=“，故选项A错误；

$\because\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(2m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geq 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\begin{cases} m=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ n=\sqrt{2}-1 \end{cases}$时取"="，故选项B错误；

$\because 2m+n=1$，$\therefore 2\left(m+1\right)+\left(n+2\right)=5$，

$\therefore \dfrac{2}{m+1}+\dfrac{9}{n+2}=\dfrac{1}{5}\left[2\left(m+1\right)+\left(n+2\right)\right]\left(\dfrac{2}{m+1}+\dfrac{9}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{5}\left[13+\dfrac{2\left(n+2\right)}{m+1}+\dfrac{18\left(m+1\right)}{n+2}\right]\ge \dfrac{1}{5}\left(13+2\sqrt{36}\right)=5$，当且仅当$\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$时取"="，

但已知$m>0$,故不等式中的等号取不到，

$\therefore \dfrac{2}{m+1}+\dfrac{9}{n+2}>5$，故选项C错误；

$\because 2m+n=1$，

$\therefore 1=\left(2m+n\right)^2=4m^2+n^2+4mn=4m^2+n^2+2\sqrt{4m^2}\cdot\sqrt{n^2}\le 2\left(4m^2+n^2\right)$，

$\therefore 4m^2+n^2\ge \dfrac{1}{2}$，当且仅当$\begin{cases} n=\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{1}{4} \end{cases}$时取"="，故选项D正确，

故选：D

15．D

【分析】由条件结合基本不等式可求$a+b$的范围，化简不等式可得$m\ge 4\left(a+b\right)-\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$，利用二次函数性质求$4\left(a+b\right)-\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$的最大值，由此可求$m$的取值范围.

【详解】不等式$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{m}{a+b}\ge 4$可化为$\dfrac{a+b}{2ab}+\dfrac{m}{a+b}\ge 4$，又$a>0$，$b>0$，$ab=1$，

所以$m\ge 4\left(a+b\right)-\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$，

令$a+b=t$，则$m\ge 4t-\dfrac{t^2}{2}$，

因为$a>0$，$b>0$，$ab=1$，所以$t=a+b\ge 2\sqrt{ab}=2$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，

又已知$m\ge 4t-\dfrac{t^2}{2}$在$\left[2,+\infty\right)$上恒成立，所以$m\ge \left(4t-\dfrac{t^2}{2}\right)_{\max}$

因为$4t-\dfrac{t^2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(8t-t^2\right)=-\dfrac{1}{2}\left(t-4\right)^2+8\le 8$，当且仅当$t=4$时等号成立，

所以$m\ge 8$，当且仅当$a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$或$a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$时等号成立，

所以m的取值范围是$\left[8,+\infty\right)$，