一年级第一学期期末联考

数学试题卷

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟.注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案：不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{y|y=2x-3,x\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{3\}$　　B. $\{4\}$　　C. $\{5\}$　　D. $\{3,5\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合 B 为函数值域，用列举法表示，再由交集运算可得.

【解析】设 $f(x)=2x-3$，$x\in\{3,4,5\}$，

则 $f(3)=3,f(4)=5,f(5)=7$，

故集合 $B=\{y|y=2x-3,x\in A\}=\{3,5,7\}$，

则 $A\cap B=\{3,5\}$.

故选：D.

2. 命题“$\forall x\in(1,+\infty)$，$x-1>\ln x$”的否定是（　　）

A. $\exists x\in(1,+\infty)$，$x-1>\ln x$　　B. $\exists x\in(1,+\infty)$，$x-1\le\ln x$

C. $\exists x\in(1,+\infty)$，$x-1<\ln x$　　D. $\forall x\in(1,+\infty)$，$x-1\le\ln x$

【答案】B

【解析】

【分析】全称量词命题的否定是存在量词命题.

【解析】命题“$\forall x\in(1,+\infty)$，$x-1>\ln x$”的否定是

“$\exists x\in(1,+\infty)$，$x-1\le\ln x$”.

故选：B.

3. 已知扇形的半径为 3，圆心角弧度数为 2，则其面积为（　　）

A. 18　　B. 12　　C. 9　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】由扇形弧长与面积公式可得.

【解析】已知扇形的半径 $R=3$，圆心角弧度数 $\alpha=2$，

则由扇形弧长公式与面积公式得

$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\times2\times3^2=9$.

故选：C.

4. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　　B. 若 $a>b$，则 $ac>bc$

C. 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$　　D. 若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

【答案】C

【解析】

【分析】根据不等式的性质，结合特殊值判断.

【解析】对于 A，取特殊值，$a=-1$，$b=-2$，满足条件，但不满足结论，故 A 错误；

对于 B，由 $a>b$，若 $c=0$，则 $ac=bc$，故 B 错误；

对于 C，由同向不等式的性质知，$a>b$，$c>d$ 可推出 $a+c>b+d$，故 C 正确；

对于 D，取 $a=3,b=0,c=-1,d=-2$，满足条件，但 $ac<bd$，故 D 错误.

故选：C.

5. 学校先举办了一次田径运动会，某班有 8 名同学参赛，又举办了一次球类运动会，这个班有 12 名同学参赛，两次运动会都参赛的有 3 人。两次运动会中，这个班总共参赛的同学有（　　）

A. 20 人　　B. 17 人　　C. 15 人　　D. 12 人

【答案】B

【解析】

【分析】利用容斥原理 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}A+\text{card}B-\text{card}(A\cap B)$ 可得.

【解析】设参加田径运动的同学构成集合 A，参加球类运动会的同学构成集合 B，

则参加田径运动的同学人数 $\text{card}A=8$，

参加球类运动会的同学人数 $\text{card}B=12$，

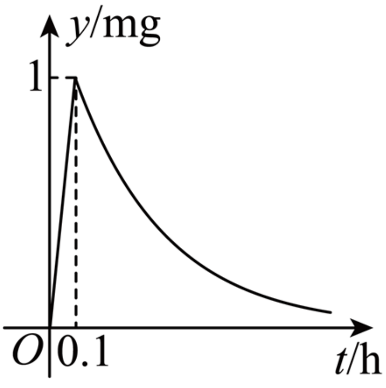
两次运动会都参赛的同学人数 $\text{card}(A\cap B)=3$，

则两次运动会中，这个班总共参赛的同学人数为

$\text{card}(A\cup B)=\text{card}A+\text{card}B-\text{card}(A\cap B)=8+12-3=17$.

故选：B.

6. 为了预防流感，某学校对教室采用药熏消毒法进行消毒.已知在药熏过程中，室内每立方米空气中的含药量 y（单位：mg）与时间 t（单位：h）的关系如图所示，函数关系式为 $y=\begin{cases}10t,0\le t\le 0.1\\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-a},t>0.1\end{cases}$（$a$ 为常数）.据测定，当室内每立方米空气中的含药量降到 0.25mg 以下时，学生方可进教室.从药熏开始，至少经过 t_0 小时后，学生才能回到教室，则（　　）



A. $a=0.2$，$t_0=0.6$　　B. $a=0.2$，$t_0=0.5$

C. $a=0.1$，$t_0=0.6$　　D. $a=0.1$，$t_0=0.5$

【答案】C

【解析】

【分析】由函数图象特殊点代入解析式求解，

【解析】当 $t=0.1$ 时， $y=1$，代入解析式得 $(\frac{1}{16})^{0.1-a}=1$，得 $a=0.1$，

令 $(\frac{1}{16})^{t-0.1}=0.25$，解得 $t=0.6$，即 $a=0.1$，$t_0=0.6$，

故选：C

7. 英国数学家泰勒（B.Taylor，1685—1731）发现了如下公式：$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，其中 $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$.这些公式被编入计算工具，计算工具计算足够多的项就可以确保显示值的精确性，计算器使用的这种方法叫数值计算法.比如，用前三项计算 $\cos0.3$，就得到 $\cos0.3\approx1-\frac{0.3^2}{2!}+\frac{0.3^4}{4!}=0.9553375$.运用上述思想，可得到 $\sin1$ 的近似值为（　　）

A. 0.83　　B. 0.84　　C. 0.85　　D. 0.86

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意将 $x=1$ 代入 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$ 的前三项计算可得结果.

【解析】用前三项计算可得 $\sin1\approx1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}=\frac{101}{120}\approx0.84$，

即 $\sin1$ 的近似值为 0.84.

故选：B

8. 若 $a=\cos50^\circ\cos128^\circ+\cos40^\circ\cos38^\circ$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin56^\circ-\cos56^\circ\right)$，$c=\frac{1-\tan^2 40^\circ30'}{1+\tan^2 40^\circ30'}$，$d=\frac{1}{2}\left(\cos80^\circ-2\cos^2 50^\circ+1\right)$，则 a，b，c，d 的大小关系为（　　）

A. $a>b>d>c$　　B. $b>a>d>c$

C. $d>a>b>c$　　D. $c>a>d>b$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角恒等变换可将式子化简为

$a=\cos 78°, b=\cos 79°, c=\cos 81°, d=\cos 80°$，再由余弦函数单调性即可比较得出大小.

【解析】易知 $a=\cos 50°\cos 128°+\cos 40°\cos 38°=-\sin 40°\sin 38°+\cos 40°\cos 38°$

$=\cos(40°+38°)=\cos 78°$；

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56°-\cos 56°)=\sin 45°\sin 56°-\cos 45°\cos 56°$

$=-\cos(45°+56°)=-\cos 101°=\cos 79°$

$c=\frac{1-\frac{\sin^2 40°30'}{\cos^2 40°30'}}{1+\frac{\sin^2 40°30'}{\cos^2 40°30'}}=\frac{\cos^2 40°30'-\sin^2 40°30'}{\cos^2 40°30'+\sin^2 40°30'}=\cos^2 40°30'-\sin^2 40°30'=\cos 81°$；

$d=\frac{1}{2}(\cos 80°-2\cos^2 50°+1)=\frac{1}{2}(\cos 80°-\cos 100°)=\frac{1}{2}(\cos 80°+\cos 80°)=\cos 80°$；

由余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，且 $78°<79°<80°<81°$，

所以可得 $\cos 78°>\cos 79°>\cos 80°>\cos 81°$，即 $a>b>d>c$.

故选：A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列各命题中，p 是 q 的充要条件的有（　　）

A. p：两个三角形相似；q：两个三角形三边成比例

B. p：四边形是菱形；q：四边形的对角线互相垂直

C. p：$xy>0$；q：$x>0$，$y>0$

D. p：$\lg x>1$；q：$x>10$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据充要条件的判断方法，逐项判断即可.

【解析】对 A：“两个三角形相似”，可得“三角形三边对应成比例”，所以 p 是 q 的充分条件；又“两个三角形三边成比例”可得“两个三角形相似”，所以 p 是 q 的必要条件.所以 p 是 q 的充要条件，故 A 正确；

对 B：因为对角线互相垂直的四边形不一定是菱形，所以 p 不是 q 的充要条件，故 B 错误；

对 C：由“$xy>0$”⇒“$\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$”，所以 p 不是 q 的充要条件，故 C 错误；

对 D：$\lg x>1 \Leftrightarrow x>10$，所以 p 是 q 的充要条件，故 D 正确.

故选：AD

10. 函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，可由函数 $y=\sin x$ 的图象经过下列哪项变换而得到（　　）

A. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标伸长到原来的 3 倍

B. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标伸长到原来的 3 倍

C. 横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标伸长到原来的 3 倍

D. 横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，纵坐标伸长到原来的 3 倍

【答案】BD

【解析】

【分析】由下面两种变换顺序：

①$y=\sin x\to y=\sin(x+\frac{\pi}{3})\to y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})\to y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

②$y=\sin x\to y=\sin 2x\to y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})\to y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

【解析】①将由 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$得到函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$，再横坐标缩小到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，再横坐标不变，纵坐标变为原来的 3 倍得到 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

②将由 $y=\sin x$ 的图象横坐标缩小到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变得到函数 $y=\sin 2x$，再向左平移$\frac{\pi}{6}$得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，再横坐标不变，纵坐标变为原来的 3 倍得到 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

故选：BD.

11. 已知函数 $f(x)=a^x-\left(\frac{1}{a}\right)^x$，其中 $a>0$，且 $a\neq1$，则下列结论中正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 是奇函数

B. 函数$f\left(x\right)$在其定义域上有零点

C. 函数$f\left(x\right)$的图象过定点$\left(0,1\right)$

D. 当$a>1$时，函数$f\left(x\right)$在其定义域上单调递增

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 项，由奇函数定义可得；B 项，由方程$f(x)=0$有解可知函数有零点；C 项，由$f(0)\neq 1$可知；D 项，由两个增函数的的和函数仍为增函数可得.

【解析】选项 A，由$f\left(x\right)=a^{x}-\left(\frac{1}{a}\right)^{x}=a^{x}-a^{-x}$,，

定义域为$\mathbf{R}$，关于原点对称.

且$f(-x)=a^{-x}-a^{x}=-f(x)$，

所以函数$f\left(x\right)$是奇函数，故 A 正确；

选项 B，令$f(x)=a^{x}-a^{-x}=0$，解得$x=0$，

则$f\left(x\right)$在其定义域上有零点，故 B 正确；

选项 C，因为$f(0)=a^{0}-a^{0}=0\neq 1$，

所以函数$f\left(x\right)$的图象过定点$(0,0)$，不过$(0,1)$，故 C 错误；

选项 D，当$a>1$时，$0<\frac{1}{a}<1$，

所以$y=a^{x}$是增函数，且$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$是减函数，则$y=-\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$是增函数，

所以$f\left(x\right)=a^{x}-\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$也是增函数，故 D 正确.

故选：ABD.

12. 已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，则下面判断正确的是（　　）

A. 若$\forall x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+1\right)>f\left(x\right)$，则函数$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上是增函数

B. 若$\forall x_{1},x_{2}\in\mathbf{R}$，$\left|f\left(x_{1}\right)+f\left(x_{2}\right)\right|\leq\left|\sin x_{1}+\sin x_{2}\right|$，则函数$f\left(x\right)$是奇函数

C. 若 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$，则函数 $f(x)$ 是周期函数

D. 若 $\forall x_1,x_2\in(-1,1)$ 且 $x_1\ne x_2$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$，则函数 $f(x)-\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，函数 $f(x)+\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减

【答案】BC

【解析】

【分析】令 $f(x)=\sin(2\pi x)+x$ 可判断 A，利用奇函数定义可判断 B，由周期函数的定义可判断 C，根据函数单调性的定义即可判断 D.

【解析】对于 A，令 $f(x)=\sin(2\pi x)+x$，满足 $f(x+1)>f(x)$，

但函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，故选项 A 错误；

对于 B，令 $x_1=x,x_2=-x$，则 $\left|f(x)+f(-x)\right|\le\left|\sin x+\sin(-x)\right|=0$，

可得 $f(x)+f(-x)=0$，即满足 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 是奇函数，可知 B 正确；

对于 C，若 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|\sin x_1-\sin x_2\right|$，

所以 $\left|f(x)-f(x+2\pi)\right|\le\left|\sin x-\sin(x+2\pi)\right|=0$，即 $f(x)-f(x+2\pi)=0$，

满足 $f(x)=f(x+2\pi)$，可得函数 $f(x)$ 是周期为 $T=2\pi$ 的周期函数，即 C 正确；

对于 D，取 $\forall x_1,x_2$，满足 $-1<x_1<x_2<1$，因为函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，所以 $\sin x_1<\sin x_2$；

可得 $\left|\sin x_1-\sin x_2\right|=\sin x_2-\sin x_1$，所以 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\sin x_2-\sin x_1$；

即 $\sin x_1-\sin x_2<f(x_1)-f(x_2)<\sin x_2-\sin x_1$，

可得 $f(x_1)+\sin x_1<f(x_2)+\sin x_2$ 且 $f(x_1)-\sin x_1>f(x_2)-\sin x_2$；

所以函数 $f(x)-\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，函数 $f(x)+\sin x$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，即 D 错误；

故选：BC

【小结】方法小结：在求解抽象函数奇偶性以及单调性时，要根据已知条件充分利用奇偶性和单调性定义，化简变形进行证明即可求得结论.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 写出一个同时具有下列性质①②的函数 $f\left(x\right)$：_________.

① $f\left(x\right)$ 是偶函数；② $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数.

【答案】$f\left(x\right)=x^2$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据所学函数图象与性质，可以考虑幂函数.

【解析】$f(x)=x^2$，定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

且 $f(-x)=(-x)^2=x^2$，则 $f(x)$ 是偶函数；

由 $f(x)=x^2$ 的图象可知在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数；

所以 $f(x)=x^2$ 同时具有性质①②.

故答案为：$f(x)=x^2$（答案不唯一，如 $f(x)=x^4, f(x)=\left|x\right|$）.

14. 若 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为__________.

【答案】4

【解析】

【分析】由基本不等式中“1”的妙用代入计算即可得出最小值为 4.

【解析】易知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(a+b\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geq 2+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=4$，

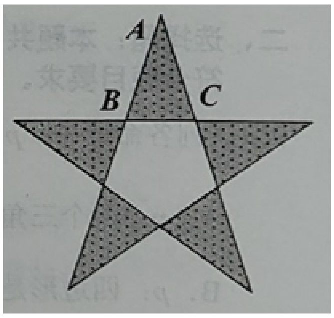
当且仅当 $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立；

即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 4；

故答案为：4

15. 17 世纪德国著名的天文学家、数学家约翰尼斯·开普勒（JohannesKepler）曾经这样说过：“几何学里有两件宝，一个是勾股定理，另一个是黄金分割.如果把勾股定理比作黄金矿的话，那么可以把黄金分割比作钻石矿.”黄金三角形有两种，其中底与腰之比为黄金分割比的黄金三角形被认为是最美的三角形，它是一个顶角为 36°的等腰三角形（另一种是顶角为 108°的等腰三角形）.

例如，五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，如图，在其中一个黄金$\triangle ABC$中，$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，根据这些信息，可得$\sin 954^\circ=$__________.



【答案】$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

【解析】

【分析】利用正弦定理得到边角关系，再通过二倍角公式转化求解$\cos 36^\circ$，最后借助诱导公式得解.

【解析】在等腰$\triangle ABC$中，$\angle BAC=36^\circ$，

则 $\angle ABC=\angle ACB=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ$，

由正弦定理得$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}=\frac{1}{2\cos 36^\circ}$，

故$\cos 36^\circ=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，

所以$\sin 954^\circ=\sin 234^\circ=-\sin 54^\circ=-\cos 36^\circ=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. 设函数$f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$，若方程$f\left(\left|3^x-2\right|\right)+2a\left(\frac{1}{\left|3^x-2\right|}+1\right)-3=0$有 3 个不等的实根，则实数$a$的取值范围是__________.

【答案】$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right]$

【解析】