System theory and analysis method
系统原理与分析方法

秦华鹏 Huapeng QIN

Associate Professor
Peking Univ. Shenzhen Graduate School
Office: E414 Tel no: 26035291
E-Mail: qinhp@pkusz.edu.cn

Nov 2015

第8讲 线性优化算法
Algorithms for linear optimization

- 案例
- 图解法

- 单纯形法

案例：农药管理问题

- 农药管理问题
  - 农田上施加的农药流失到湖泊中，危害到吃鱼的鸟类
  - 农户如何管理农田，才不会对鸟类造成危害？
- 条件
  - 湖泊容积为$10^5 m^3$，湖水的平均停留时间为半年
  - 周围有农田$10^3 ha$，种植两种作物
  - 湖水中的农药在食物链中被富集，农药浓度随着食物链呈几何级数增长。
  - 鸟类能忍受的最大农药浓度为100 ppm (mg/L)

农药随食物链富集情况

农药浓度（ppm）

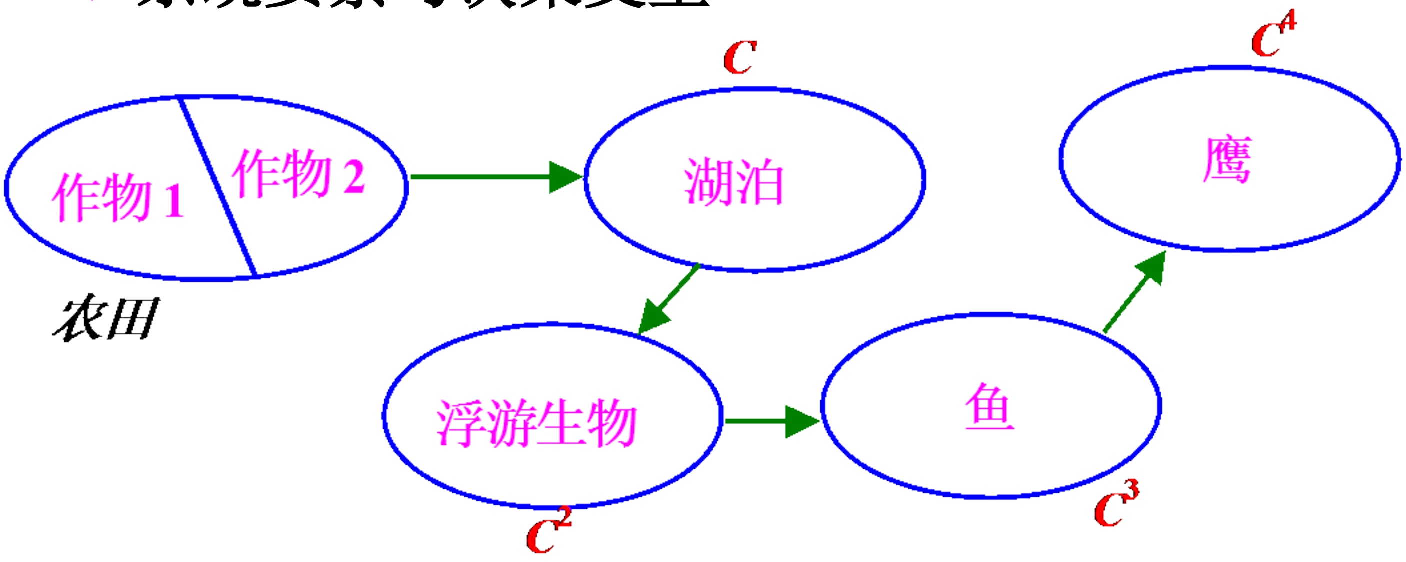
湖水中	浮游植物中	鱼体内	鸟体内
C	C^2	C^3	C^4

作物农药使用、流失、收益和费用情况

作物	农药施加量（kg/ha）	农药流失率（%）	作物收入（$/ha）	作物费用（$/ha）	净收益（$/ha）
蔬菜	6	15	300	160	140
粮食	2.5	20	150	50	100

系统和目标的确定

- 系统的目标
- 系统的边界
- 约束条件
- 系统要素与决策变量



建立变量间的数量关系

- 决策变量：$X1$——蔬菜种植面积（ha）；

  $X2$——粮食种植面积（ ha ）
- 净收益：$Z=（300-160）X_1+（150-50）X_2$
- 种植蔬菜→入湖农药量$=6*0.15 * X_1=0.9 X_1$ kg
- 种植粮食→入湖农药量$=2.5 * 0.20 * X_2=0.5 X_2$ kg
- 湖水平均农药浓度

  $$C=(0.9 X_1 +0.5 X_2) / (10^5 / 0.5) \text{ kg/m}^3$$

  $$=(0.9 X_1 +0.5 X_2) / 200 \text{ ppm}$$
- 鹰体内的农药浓度$=C^4$ ppm

建立变量与目标、约束条件关系

- 目标函数：
  - Z＝（300-160）X_1+（150-50）X_2
- 约束条件：

$$C^4 = \left(\frac{0.9X_1 + 0.5X_2}{200}\right)^4 \le 100 \quad \Rightarrow \quad 0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$

$$X_1 + X_2 \le 1000$$

农药管理的线性优化

蔬菜单位面积的净收益

粮食单位面积的净收益

$$\max Z = 140X_1 + 100X_2$$

蔬菜单位面积的农药流失量

$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$

农药流失入湖限制量

粮食单位面积的农药流失量

$$X_1 + X_2 \le 1000$$

种植面积限制量

$$X_1，X_2 \ge 0$$

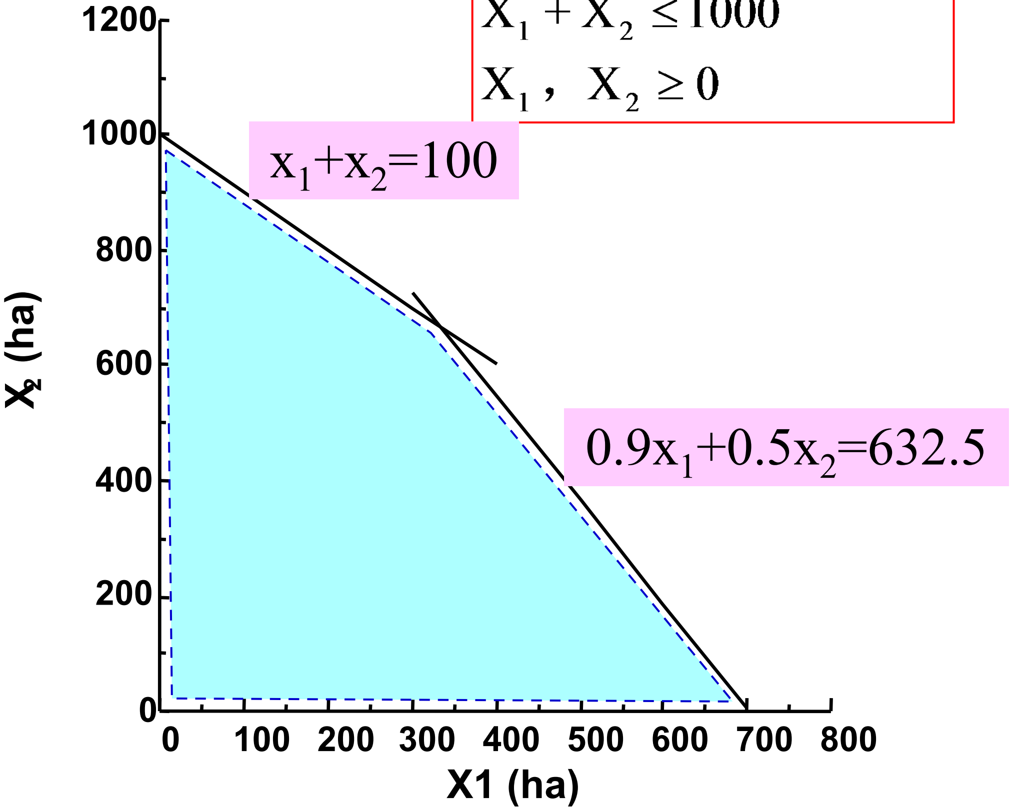
2 图解法

- 农药管理问题的图解法
- 灵敏度分析
- 线性优化问题解的特点

农药管理问题的图解法

- 可行解
- 可行域

$$\max Z = 140X_1 + 100X_2$$
$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$
$$X_1 + X_2 \le 1000$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

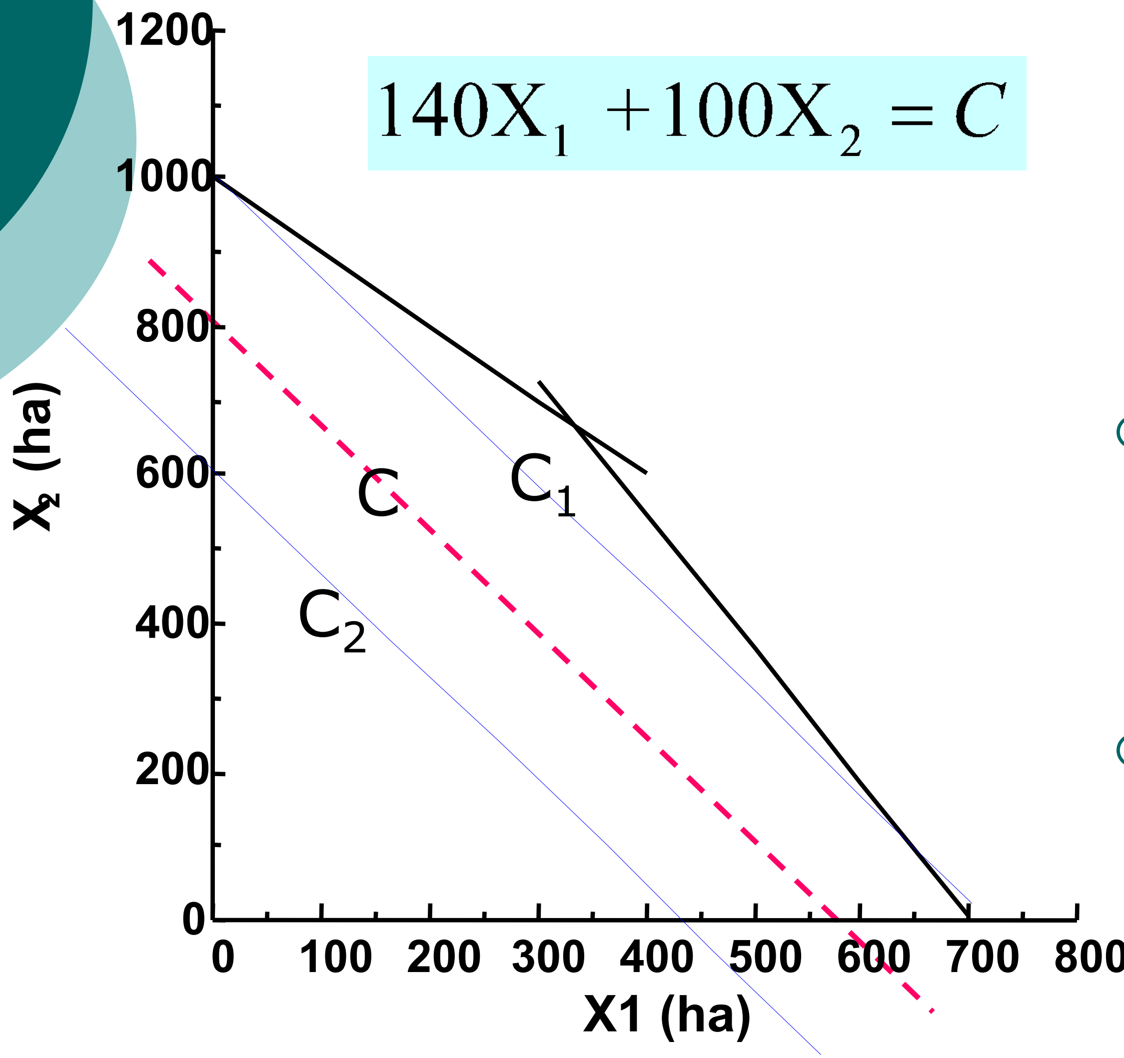


优化问题

↓

在可行域上搜索最佳点

目标函数等值线的特征



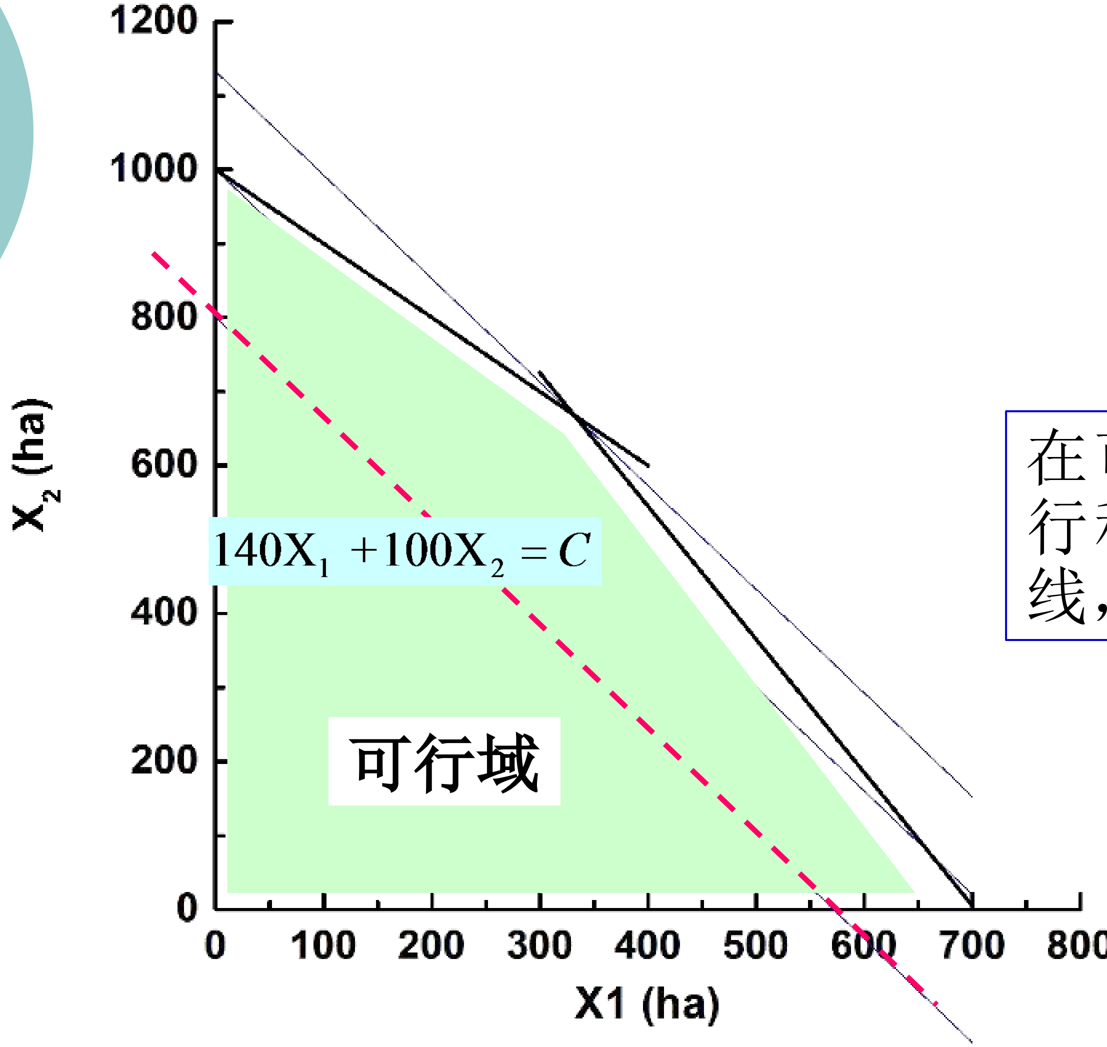
$$140X_1 + 100X_2 = C$$

$$\max Z = 140X_1 + 100X_2$$
$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$
$$X_1 + X_2 \le 1000$$
$$X_1, \ X_2 \ge 0$$

- **目标函数等值线**：针对目标函数，假设Z取定值（如C）时，X1和X2变化所构成的直线
- C取不同值对应的目标函数等值线相互平行

搜索最优解

$$\max Z = 140X_1 + 100X_2$$
$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$
$$X_1 + X_2 \le 1000$$
$$X_1，X_2 \ge 0$$

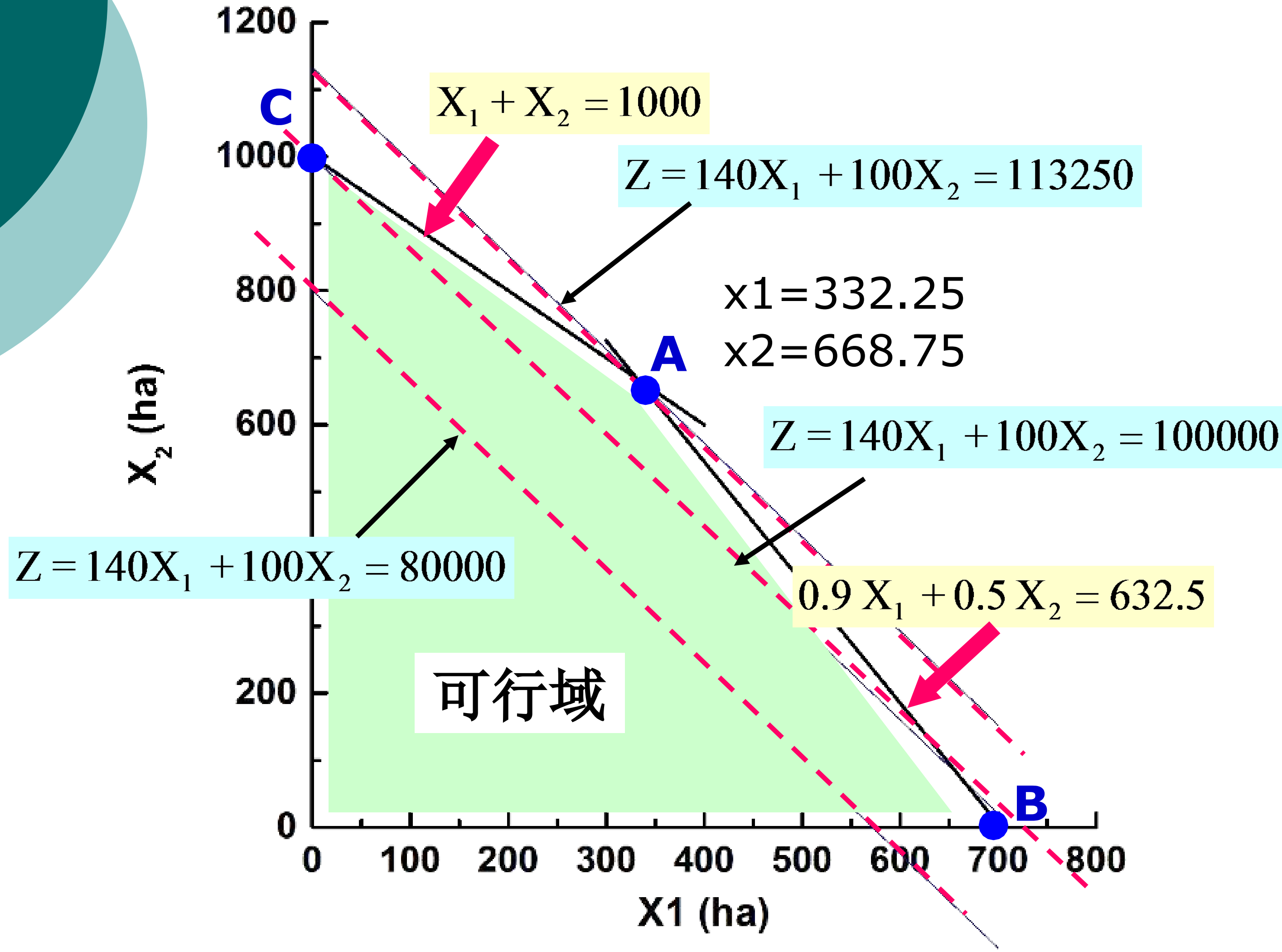


优化问题

在可行域上，通过平行移动目标函数等值线，搜索最佳点

$$\max Z = 140X_1 + 100X_2$$
$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$
$$X_1 + X_2 \le 1000$$
$$X_1 , \ X_2 \ge 0$$

最优解



最优解为A点：

X_1= 331.25ha

X_2= 668.75ha

最大净收益：

$113250

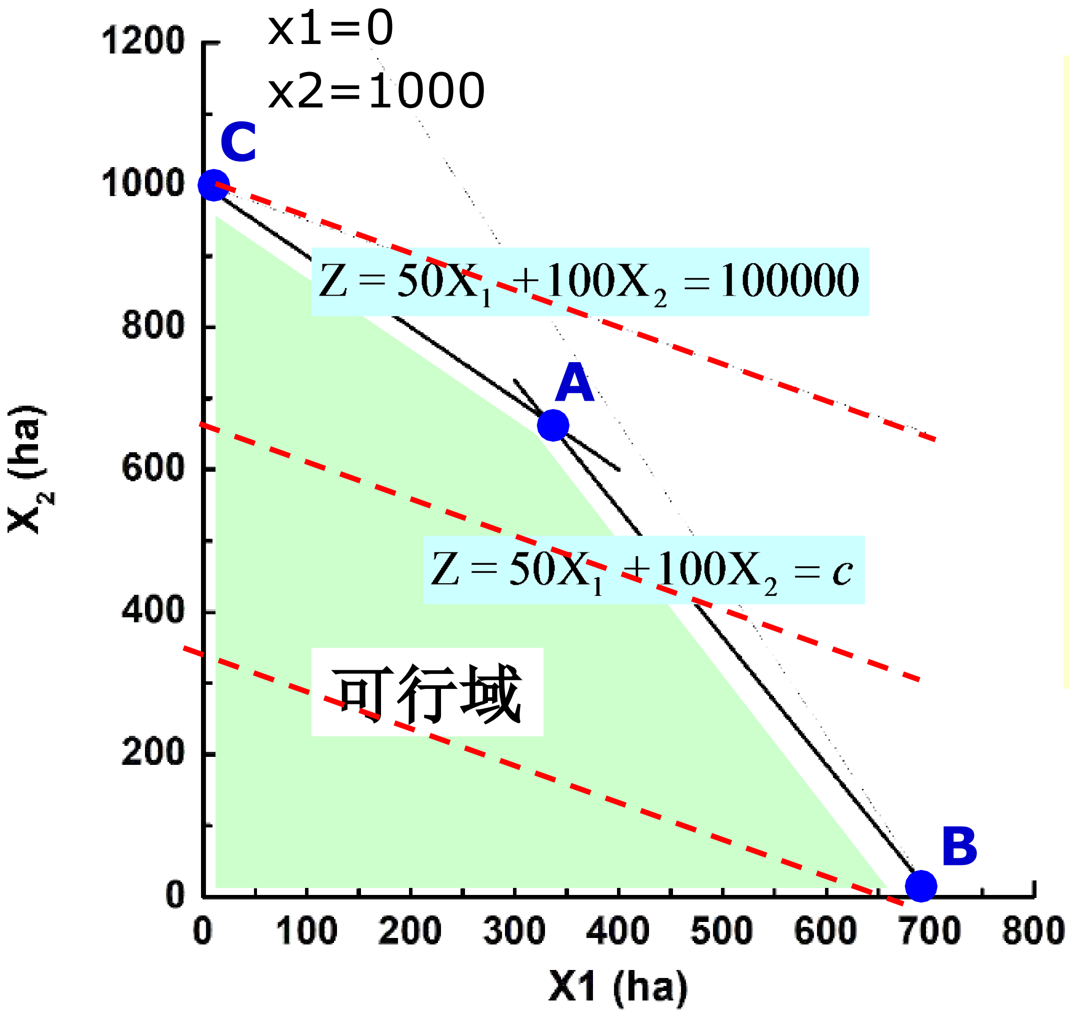
图解法的步骤

- 画由约束条件限制范围（可行域）
- 穿过可行域，画目标函数 $Z=c$ 的等值线
- 确定等值线移动方向
  - 若min Z，减小c，观察等值线移动方向，以该方向作为搜寻最优解的方向；
  - 若max Z，增加c，观察等值线移动方向，以该方向作为搜寻最优解的方向
- 沿最优解搜寻方向平移等值线，找到等值线与可行域相接的最终边际点，该切点即为最优解。

2.2 灵敏度分析

- 模型中参数对最优解影响的灵敏程度，例如：
  - 蔬菜的净收益**140→50$/ha**时，目标函数值的变化？
  - 蔬菜的净收益 **140→220$/ha**时，目标函数值的变化？

种植蔬菜净收益下降为50$/ha时



目标函数

$Z' = 50X_1 + 100X_2$

最优解是为C点：

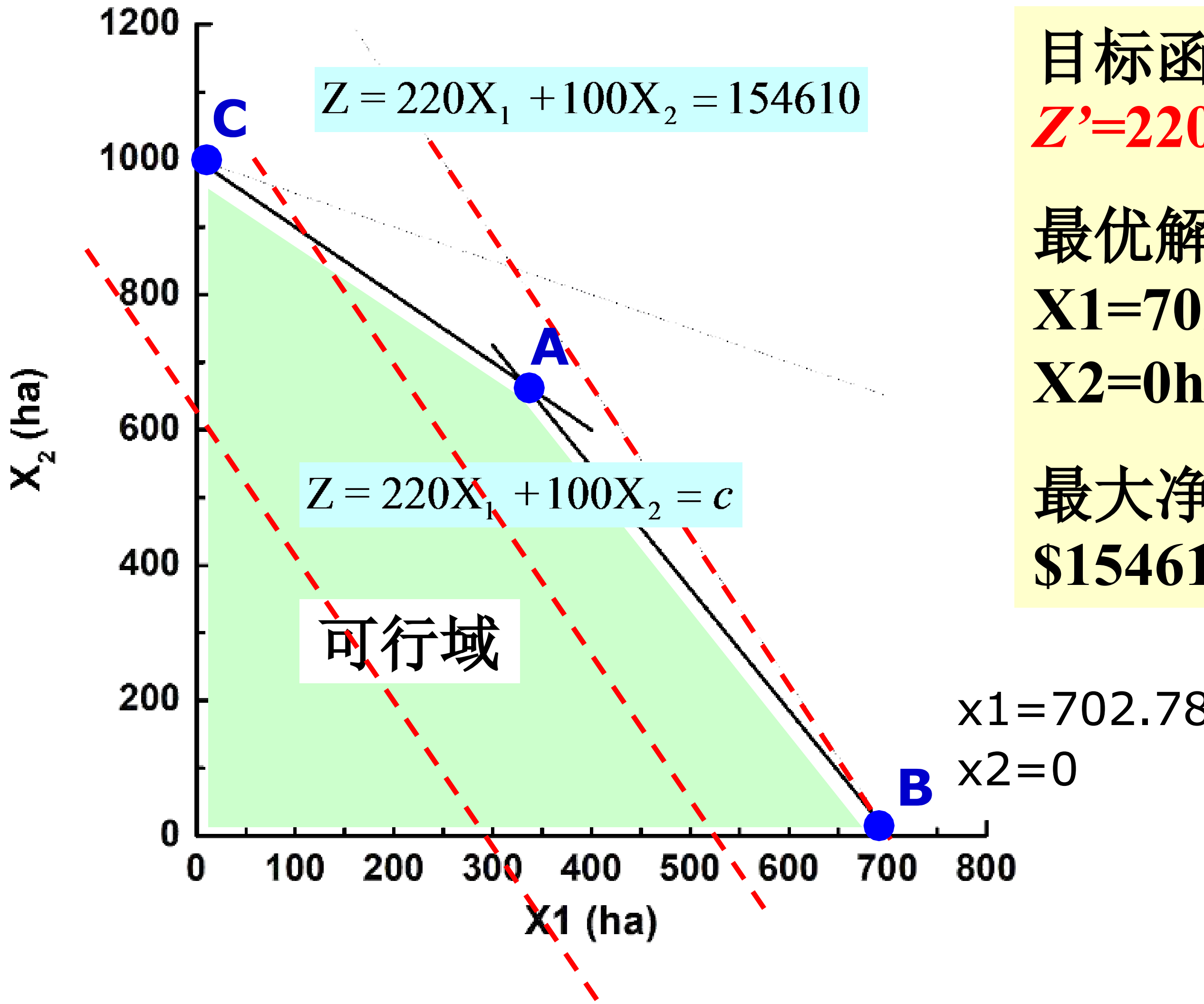
X1=0 ha，

X2=1000ha

最大净收益：

$100000

种植蔬菜净收益上升为220$/ha时



目标函数

$Z' = 220X_1 + 100X_2$

最优解为B点：

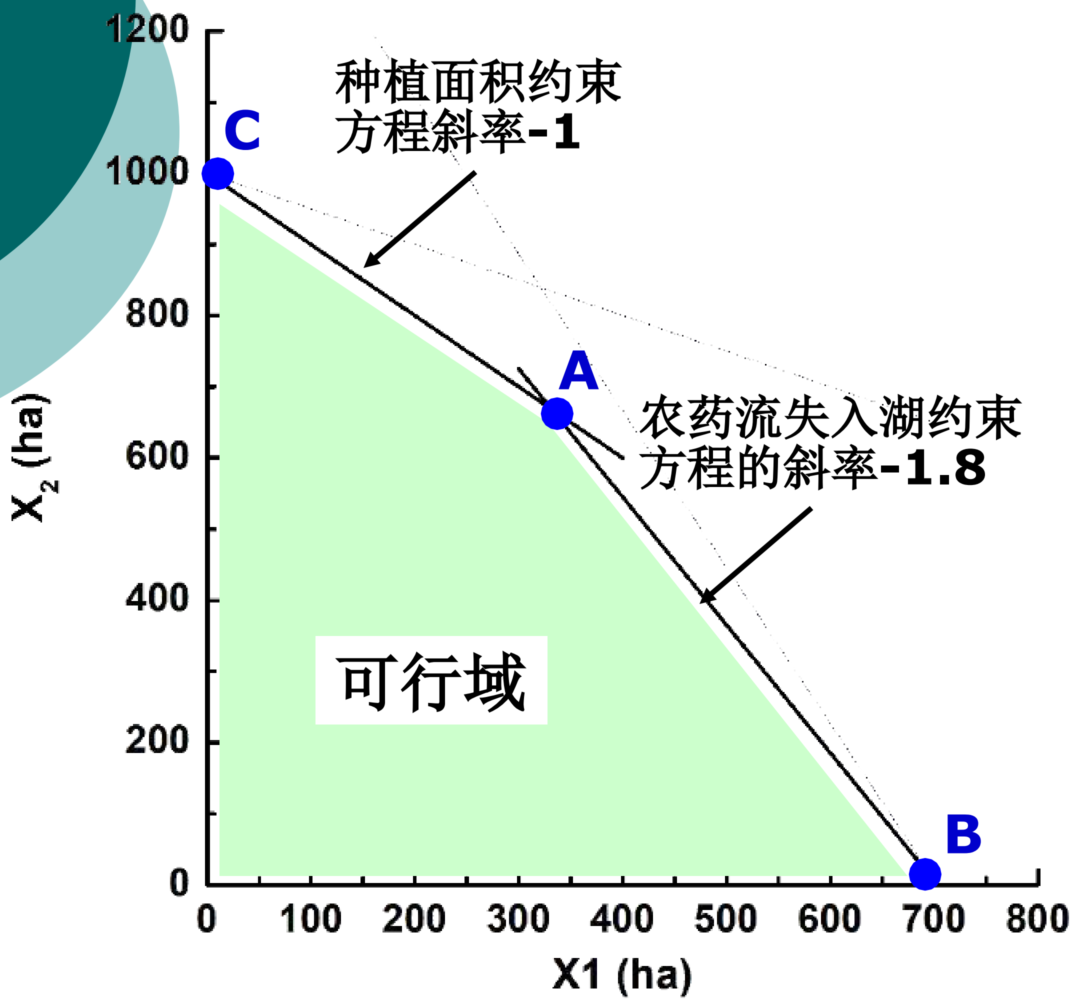
X1=702.78 ha，

X2=0ha

最大净收益：

$154610

农药管理问题的灵敏度分析



$$\max Z = b_1X_1 + b_2X_2$$
$$0.9X_1 + 0.5X_2 \le 632.5$$
$$X_1 + X_2 \le 1000$$
$$X_1, \ X_2 \ge 0$$

- 最优解由目标函数和两个约束条件的相对斜率所确定：
  - $b_1/b_2 > 1.8$，最优解B
  - $b_1/b_2 < 1$，最优解 C
  - $1 < b_1/b_2 < 1.8$，最优解 A
  - $b_1/b_2 = 1$或1.8，目标线与CA或 AB重合，有无数个有相同目标值的最优解

2.3线性优化解的特点

- 解有可能出现的情况：

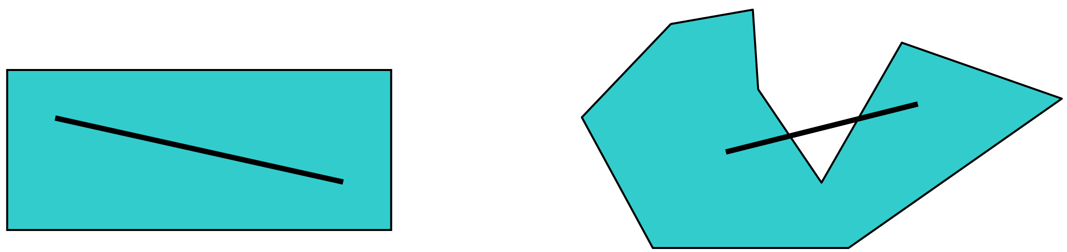
有最优解
- 唯一最优解
- 无穷多最优解：目标函数等值线与最优解搜寻方向上某约束条件的边界线平行

无最优解
- 可行域无界：如最优解搜寻方向上可行域无界时，无最优解
- 无可行解：约束条件无共同区域

优化解的几何解释

若连接多边形中任意两点x_1、x_2的线段仍在多边形内，则称该多边形为凸多边形

- 线性优化问题可行解构成的可行域，一般是凸多边形



- 若存在唯一最优解，则一定在可行域的某个顶点上
- 若两个顶点同时得到最优解，则这两顶点连线上的任一点都是最优解。