2.2　直线与圆的位置关系

知识点　直线与圆的位置关系

设圆M:$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$,直线l:$Ax+By+C=0$(A,B不同时为0).圆心$M(a,b)$到直线l的距离$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.由$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\\Ax+By+C=0,\end{cases}$消去$y$(或$x$),得到关于$x$(或$y$)的一元二次方程,其判别式为$\Delta$.

位置关系	相交	相切	相离
公共点个数	2	1	0
几何法	$d<r$	$d=r$	$d>r$
代数法	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

知识辨析

1.直线与圆有公共点,则直线与圆有怎样的位置关系?

2.若直线与圆相交,则直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程必有解,对吗?

3.若圆心到直线的距离大于半径,则直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程一定无解,对吗?

4.过不在圆内的一点,一定可以作圆的两条切线,对吗?

一语破的

1.若直线与圆有且仅有一个公共点,则直线与圆相切;若直线与圆有两个公共点,则直线与圆相交.

2.对.若直线与圆相交,则它们必有公共点,而公共点的坐标是直线方程与圆的方程的公共解,所以直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程必有解.

3.对.若圆心到直线的距离大于半径,则直线与圆相离,所以直线与圆没有公共点,因此直线方程与圆的方程没有公共解,所以直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程无解.

4.不对.不在圆内的点,可能在圆上,也可能在圆外.当点在圆上时,只能作圆的一条切线;当点在圆外时,可以作圆的两条切线.

关键能力 定点破

定点1 直线与圆的位置关系的判断 方法技巧

判断直线与圆的位置关系主要有几何法和代数法两种方法,几何法侧重图形的几何性质,代数法步骤简单,但计算量较大,具体解题时要根据题目特点合理选择.

另外,也可以用定点法判断,即若直线恒过定点且定点在圆内,则直线与圆相交.该法有一定的局限性,若定点在圆上或在圆外,则需利用代数法或几何法进行讨论.

典例 已知直线$l:mx-y-m-1=0$,圆$C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$.当m为何值时,直线l与圆C:

(1)相离?(2)相切?(3)相交?

解析 解法一(代数法):联立$\begin{cases}mx-y-m-1=0,\\x^2+y^2-4x-2y+1=0,\end{cases}$消去$y$得$x^2+(mx-m-1)^2-4x-2(mx-m-1)+1=0$,整理得$(1+m^2)\cdot x^2-2(m^2+2m+2)x+m^2+4m+4=0$,

因为$1+m^2\geq 1$,所以$\Delta=4(m^2+2m+2)^2-4(1+m^2)(m^2+4m+4)=4m(3m+4)$.

(1)若直线与圆相离,则$\Delta=4m(3m+4)<0$,即$-\frac{4}{3}<m<0$,故直线与圆相离时,m的取值范围为$\left(-\frac{4}{3},0\right)$.

(2)若直线与圆相切,则$\Delta=4m(3m+4)=0$,即$m=0$或$m=-\frac{4}{3}$,故直线与圆相切时,m的值为0或$-\frac{4}{3}$.

(3)若直线与圆相交,则$\Delta=4m(3m+4)>0$,即$m>0$或$m<-\frac{4}{3}$,故直线与圆相交时,m的取值范围为

$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(0,+\infty)$.

解法二(几何法):将方程$x^2+y^2-4x-2y+1=0$化为标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=4$,易知圆心坐标为

$(2,1)$,

半径$r=2$.

则圆心到直线l的距离$d=\frac{|2m-1-m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$.

(1)若直线与圆相离,则$d>r$,即$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}>2$,解得$-\frac{4}{3}<m<0$,故直线与圆相离时,$m$的取值范围为$\left(-\frac{4}{3},0\right)$.

(2)若直线与圆相切,则$d=r$,即$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$,解得$m=0$或$m=-\frac{4}{3}$,故直线与圆相切时,$m$的值为0或$-\frac{4}{3}$.

(3)若直线与圆相交,则$d<r$,即$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}<2$,解得$m>0$或$m<-\frac{4}{3}$,故直线与圆相交时,$m$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(0,+\infty)$.

定点 2　过点$P(x_0,y_0)$的圆的切线方程的求法　方法技巧

1.点P在圆上

(1)直接法:先求切点与圆心连线的斜率k,再由垂直关系得切线的斜率为$-\frac{1}{k}(k\neq 0)$,由直线的点斜式方程可得切线方程为$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$.如果切点与圆心连线的斜率为零或不存在,则由图形可直接得切线方程为$x=x_0$或$y=y_0$.

(2)待定系数法:设切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$,由圆心到直线的距离等于半径建立方程,可求得k,即得切线方程.注意此时切点与圆心的纵坐标不相等.

注:过圆上一点的切线仅有一条,可熟记下列结论:

①若点$P(x_0,y_0)$在圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$上,则过点P的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$;

②若点$P(x_0,y_0)$在圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$上,则过点P的切线方程为$(x_0-a)\cdot(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$;

③若点$P(x_0,y_0)$在圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$上,则过点$P$的切线方程为$x_0x+y_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$.

2.点P在圆外

(1)通常用待定系数法,其求法同1中的待定系数法.当用此法只求出一个方程时,另一个方程应为$x=x_0$,因为在上面解法中不包括斜率不存在的情况,而过圆外一点的切线有两条.一般不用联立方程的方法求解k.

(2)过圆外一点的切线有两条,可熟记下列结论:

①若点$P(x_0,y_0)$为圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$外一点,过点P作圆的两条切线,切点分别为A,B,则直线AB的方程为$x_0x+y_0y=r^2$;

②若点$P(x_0,y_0)$为圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$外一点,过点P作圆的两条切线,切点分别为A,B,则直线AB的方程为$(x_0-a)\cdot(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$;

③若点$P(x_0,y_0)$为圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$外一点,过点$P$作圆的两条切线,切点分别为$A,B$,则直线$AB$的方程为$x_0x+y_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$.

典例1 已知圆O:$x^2+y^2=9$,点P为直线$x+2y-9=0$上一动点,过点P向圆O引两条切线PA,PB,且A,B为切点,则直线AB经过定点__(1,2)__.

解析 设$P(9-2b,b)$,易得直线AB的方程为$(9-2b)x+by=9$,即$b(y-2x)+9x-9=0$,令$\begin{cases}y-2x=0,\\9x-9=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$故直线$AB$经过定点$(1,2)$.

典例2 已知点$P(2,3)$,$M(3,1)$,圆C:$(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

(1)求过点P的圆C的切线方程;

(2)求过点M的圆C的切线方程.

解析　由题意得圆心$C(1,2)$,半径$r=\sqrt{2}$.

(1)解法一:$\because(2-1)^2+(3-2)^2=2$,$\therefore P$在圆$C$上.

$\because k_{PC}=\dfrac{3-2}{2-1}=1$,$\therefore$切线的斜率$k=-\dfrac{1}{k_{PC}}=-1$,

$\therefore$过点P的圆C的切线方程为$y-3=-(x-2)$,即$x+y-5=0$.

解法二:易知过点P的切线斜率存在,故可设切线方程为$y-3=k(x-2)$,则由$\begin{cases}y-3=k(x-2),\\(x-1)^2+(y-2)^2=2,\end{cases}$得

$(k^2+1)x^2-(4k^2-2k+2)x+4k^2-4k=0$,则$\varDelta=[-(4k^2-2k+2)]^2-4(k^2+1)(4k^2-4k)=0$,即$k^2+2k+1=0$,

$\therefore k=-1$.

$\therefore$过点P的圆C的切线方程为$y-3=-(x-2)$,即$x+y-5=0$.

(2)$\because(3-1)^2+(1-2)^2=5>2$,$\therefore M$在圆$C$外.

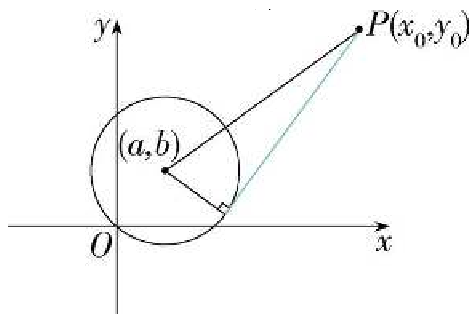
易知过点M的切线斜率存在,故可设切线方程为$y-1=k(x-3)$,即$kx-y-3k+1=0$,

∴圆心C到切线的距离$d=\frac{|k-2-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$,解得$k=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$,

∴切线方程为$y-1=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}(x-3)$或$y-1=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}(x-3)$,即$x+(\sqrt{6}-2)y-1-\sqrt{6}=0$或$x-(\sqrt{6}+2)y+\sqrt{6}-1=0$.

定点 3 **切线长的求法** 方法技巧

过圆外一点P,可作圆的两条切线,我们把点P与切点所连线段的长称为切线长.切线长可由勾股定理来计算.如图,从圆外一点$P(x_0,y_0)$作圆$(x-a)^2+(y-b)^2$ r^2 (r 0)的切, 则切长为$\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2}$.



典例 已知圆心C在直线$y=x$上且圆C过点$A(-2,5)$,$B(5,4)$.

(1)求圆C的方程;

(2)若D在直线$y=x+10$上,过D作圆C的切线,求切线长的取值范围.