第五章　三角函数

第三节　三角恒等变换

第1课时　两角和与差的三角函数

内容概览

必备知识 · 逐点夯实

核心考点 · 分类突破

【课标解读】

【课程标准】

1.经历推导两角差余弦公式的过程,知道两角差余弦公式的意义.

2.能从两角差的余弦公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式.

【核心素养】

数学抽象、数学运算.

【命题说明】

考向考法	高考命题常以角为载体,考查两角和与差的三角函数;三角函数化简求值是高考热点,常以选择题或填空题的形式出现.
预测	高考可能会与三角恒等变换结合考查.

必备知识 · 逐点夯实

返回

知识梳理·归纳

1.两角和与差的余弦、正弦、正切公式

(1)公式$C_{(\alpha-\beta)}$:$\cos(\alpha-\beta)=$ $\underline{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$;

(2)公式$C_{(\alpha+\beta)}$:$\cos(\alpha+\beta)=$ $\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$;

(3)公式$S_{(\alpha-\beta)}$:$\sin(\alpha-\beta)=$ $\underline{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$;

(4)公式$S_{(\alpha+\beta)}$:$\sin(\alpha+\beta)=$ $\underline{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$;

(5)公式$T_{(\alpha-\beta)}$:$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$;

(6)公式$T_{(\alpha+\beta)}$:$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

2.辅助角公式

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$,其中$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

常用结论

两角和与差的公式的常用变形:

(1)$\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

(2)$\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$.

(3)$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

$\tan\alpha\tan\beta=1-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)}-1$.

基础诊断·自测

类型	辨析	改编	易错	高考
题号	1	2	4	3

1.(思考辨析)(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)存在α,β,使等式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$.(√)

(2)两角和与差的正弦、余弦公式中的角α,β是任意角.(√)

(3)两角和与差的正切公式中的角α,β是任意角.(×)

(4)公式$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$中$\varphi$的取值与$a,b$的值无关.(×)

提示:当$\alpha=\beta=0$时,$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$,所以(1)正确;由两角和与差的正弦、余弦、正切公式成立的条件可知,(2)正确,(3)错误;由辅助角公式可知,$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$中$\varphi$的取值与$a,b$的值有关,所以(4)错误.

2.(必修第一册P219例4改条件)$\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°$等于(　　)

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C.$-\frac{1}{2}$　D.$\frac{1}{2}$

【解析】选D.原式$=\sin 20°\cos 10°+\cos 20°\sin 10°=\sin(20°+10°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

3.(2022·新高考*II*卷)若$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$,则(　　)

A.$\tan(\alpha-\beta)=1$　　B.$\tan(\alpha+\beta)=1$

C.$\tan(\alpha-\beta)=-1$　　D.$\tan(\alpha+\beta)=-1$

【解析】选C.方法一:因为$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$,

所以$\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$,

即$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$,所以$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\sin\beta\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$,

所以$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta-\sin\beta\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=0$,

所以$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta)=0$,所以$\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以$\alpha-\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}$,所以$\tan(\alpha-\beta)=-1$.

方法二:由题意可得,$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$,

即$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$,

所以$\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$,

故$\tan(\alpha-\beta)=-1$.

4.(记错公式形式导致错误)若将$\sin x-\sqrt{3}\cos x$写成$2\sin(x-\varphi)$的形式,其中$0\leq\varphi<\pi$,则$\varphi=$___$\frac{\pi}{3}$___.

【解析】因为$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$,

所以$\cos\varphi=\frac{1}{2}$,$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为$0\leq\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

核心考点 · 分类突破

返回

考点一两角和与差的三角函数公式的基本应用

[例1](1)若$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,α是第三象限角,则$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=$(　　)

A.$\frac{7\sqrt{2}}{10}$　B.$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　C.$-\frac{\sqrt{2}}{10}$　D.$\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】选B.因为α是第三象限角,所以$\sin\alpha<0$,

且$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$,

因此,$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=$

$(-\frac{3}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}+(-\frac{4}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(2)(2024·湛江模拟)已知$\cos\alpha+\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})=1$,则$\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})$等于(　　)

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】选D.因为$\cos\alpha+\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})=1$,

所以$\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{3}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha)$

$=\sqrt{3}\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=1$,

所以$\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)已知$\sin\alpha=\frac{3}{5},\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi),\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$,

则$\tan(\alpha-\beta)$的值为(　　)

A.$-\frac{2}{11}$　B.$\frac{2}{11}$　C.$\frac{11}{2}$　D.$-\frac{11}{2}$

【解析】选A.因为$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,所以$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,

$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,又$\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$,所以$\tan\beta=-\frac{1}{2}$,

所以$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1+(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})}=-\frac{2}{11}.$$

解题技法

(1)两角和与差的三角函数公式可看作是诱导公式的推广,可用α,β的三角函数表示$\alpha\pm\beta$的三角函数.

(2)在使用两角和与差的三角函数公式时,特别要注意角与角之间的关系,完成统一角和角与角转换的目的.

对点训练

1.已知$\sin\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{3}$,则$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$的值为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】选B.由$\sin\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{3}$,得$\sin\alpha=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{3}$,则$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\frac{1}{3}$,即$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{3}$.

2. 已知$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\cos\alpha$, $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$\tan(\alpha+\beta)=$ $\underline{\quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad}$.

【解析】因为$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha$

$=\sqrt{3}\cos\alpha$,所以$-\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$,故$\tan\alpha=-\sqrt{3}$,

所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【加练备选】

(2020·全国III卷)已知$\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$,则$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$等于(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】选B.因为$\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

$=\sin(\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})+\sin(\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})$

$=\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}+\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=1$,

所以$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$