

运筹帷幄之中

决胜千里之外



整数线性规划

Integer Linear Programming

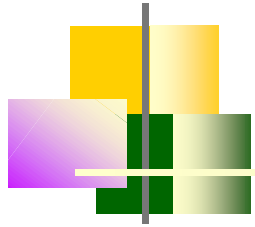


第一节 整数规划问题的特点及应用

1. 整数规划问题的应用意义

整数规划是规划论中的一个重要分支。

主要是由于经济管理中的大量问题抽象为模型时，人们发现许多量具有不可分割性，因此当它们被作为变量引入到规划中时，常要求满足取整条件。如生产计划中，生产机器多少台（整数）；人力资源管理中，招聘员工多少人（整数）；运输问题中，从一个港口到另一个港口的集装箱调运数量（整数）；另外，运作管理中的决策问题：如工厂选址、超市选址、人员的工作指派、设备购置和配置等。



其规划模型中往往须引入逻辑变量（即变量仅取 0 或 1 两个值）来反映冲突因素和抉择。因此，这些问题的规划模型不同于前述的线性规划范畴，而属于一种新的类型——整数规划。可以毫不夸张地说，整数规划在实践中有比线性规划更为广泛的应用空间。

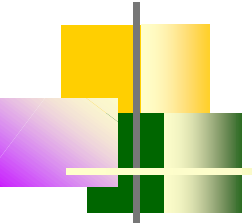
在整数规划模型中，逻辑变量起着很大的作用，下面说明逻辑变量的应用：

例 某物流公司欲从 m 个可能的位置选择一些建立物流中心供应 n 个地区。现企业经过调查和预算，知道建设物流中心 i 的费用为 F_i ，库容量为 s_i , $i=1,2,\dots,m$ ；地区 j 的需求量为 d_j , $j=1, 2, \dots, n$ ；物流中心 i 到地区 j 的单位运费为 c_{ij} 。试建立总费用最省的整数规划模型。

解：设 b_i 为在第 i 个可能位置建物流中心的状态，

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{建} \\ 0, & \text{不建} \end{cases}, \quad x_{ij} = \text{物流中心 } i \text{ 到地区 } j \text{ 的调运量。}$$

依题意，建立模型如下，


$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m F_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m b_i \leq m$$

$$b_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

例 某国外大型连锁超市集团准备全面进入某省会城市。

拟从可供选择的 10 个店址中确定 5 个。每个备选店址用符号 L_1, L_2, \dots, L_{10} 表示。经过调查, 每个备选店址相应的前期预计投入和所覆盖的目标顾客数的综合值分别为 C_1, C_2, \dots, C_{10} (综合值越大越好)。并且在店址选择上要满足下列条件:

- ① L_1 和 L_5 必须同时选择;
- ② L_8 和 L_1 二者必选其一, 但不能同选;
- ③ L_3, L_7 不能同选; L_4, L_7 不能同选;
- ④ L_5, L_6, L_7, L_8 , 最多只能选两个。

试帮助该超市集团建立这个问题的整数规划模型。

解：由题意，设 $y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ ， $y_i=0$ ，表示不选择店址 L_i ， $y_i=1$ ，表示

选择店址 L_i ， $i=1,2,\dots,10$ 。建立数学模型如下，

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{10} C_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 5$$

$$y_1 - y_5 = 0$$

$$y_1 + y_8 = 1$$

$$y_3 + y_7 \leq 1$$

$$y_4 + y_7 \leq 1$$

$$y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \leq 2$$

$$y_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad .$$



应用案例

- 投资组合问题
- 旅游售货员问题
- 背包问题





投资组合问题

- 背景
- 实例
- 模型





背景

- **证券投资**：把一定的资金投入合适的有价证券上以规避风险并获得最大的利润。
- **项目投资**：财团或银行把资金投入若干项目中以获得中长期的收益最大。





案例

- 某财团有 B 万元的资金，经初步考察选中 n 个投资项目，每个项目只能投资一次。其中第 j 个项目需投资金额为 b_j 万元，预计 5 年后获利 c_j ($j=1, 2, \dots, n$) 万元，问应如何选择项目使得 5 年后总收益最大？





模型

- **变量**—每个项目是否投资

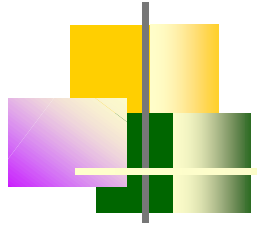
$$x_j = 1, 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

- **约束**—总金额不超过限制

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j \leq B$$

- **目标**—总收益最大

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$



$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq B \\ x_j = 1, 0; j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \end{aligned}$$





旅游售货员问题

- 背景
- 案例
- 模型





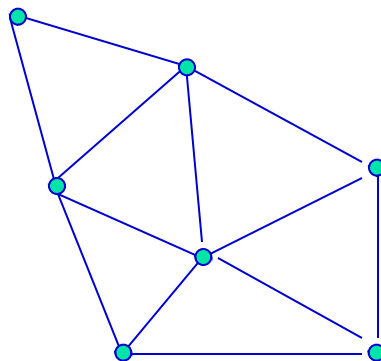
背景

- 旅游线路安排
预定景点走且只走一次
路上时间最短
- 配送线路—货郎担问题
送货地到达一次
总路程最短



案例

- 有一旅行团从 v_0 出发要遍游城市 v_1, v_2, \dots, v_n 已知从 v_i 到 v_j 的旅费为 c_{ij} ，问应如何安排行程使总费用最小？





模型

- **变量**—是否从*i*个城市到第*j*个城市

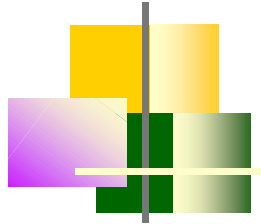
$$x_{ij} = 1, 0;$$

- **约束**

每个城市只能到达一次、离开一次

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1; i = 1, 2, \dots, n$$


$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1; j = 1, 2, \dots, n$$



■ 目标—总费用最小

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}$$




$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^n x_{ij} = 1; i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=0}^n x_{ij} = 1; j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 1, 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$





背包问题

- 背景
- 案例
- 模型



背景

- 邮递包裹

把形状可变的包裹用尽量少的车辆运走

- 旅行背包

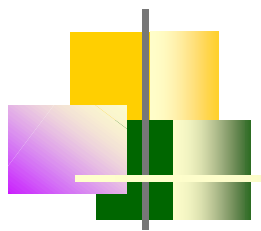
容量一定的背包里装尽可能的多的物品





实例

- 某人出国留学打点行李，现有三个旅行包，容积大小分别为**1000**毫升、**1500**毫升和**2000**毫升，根据需要列出需带物品清单，其中一些物品是必带物品共有**7**件，其体积大小分别为**400、300、150、250、450、760、190**（单位毫升）。尚有**10**件可带可不带物品，如果不带将在目的地购买，通过网络查询可以得知其在目的地的价格（单位美元）。这些物品的容量及价格分别见下表，试给出一个合理的安排方案把物品放在三个旅行包里。



物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	200	350	500	430	320	120	700	420	250	100
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

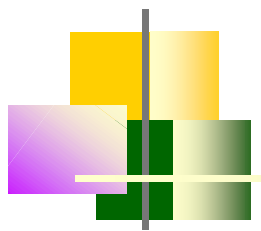




问题分析

- **变量**—对每个物品要确定是否带同时要确定放在哪个包裹里，如果增加一个虚拟的包裹把不带的物品放在里面，则问题就转化为确定每个物品放在哪个包裹里。如果直接设变量为每个物品放在包裹的编号，则每个包裹所含物品的总容量就很难写成变量的函数。为此我们设变量为第*i*个物品是否放在第*j*个包裹中

x_{ij}



■ 约束

包裹容量限制

$$\sum_{i=1}^{17} c_i x_{ij} \leq r_j; j=1,2,3$$


必带物品限制

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1; i=1,2..7$$

选带物品限制

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 1; i=8,2..17$$



- 
- 目标函数—未带物品购买费用最小

$$1 - \sum_{j=1}^3 x_{ij}; i=8, 2..17$$

$$\sum_{i=8}^{17} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^3 x_{ij} \right)$$



模型

$$\min \sum_{i=8}^{17} p_i (1 - \sum_{j=1}^3 x_{ij})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{17} c_i x_{ij} \leq r_j; j=1,2,3 \\ \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1; i=1,2,\dots,7 \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 1; i=8,2,\dots,17$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1; j=1,2,3$$





第二节 割平面法

问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{取整} \end{cases} \end{aligned}$$

解：用割平面法。

1. 先解去掉取整条件的线性规划问题		3	2	0	0	
2	x_2	$5/2$	1	$1/2$	$-1/2$	
设其最终单纯形表为		1	0	$-1/4$	$3/4$	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
	$c_j - z_j$		0	0	$-1/4$	$-5/4$

2。找出非整数解变量中分数部分最大的（此处为x2），并写出这一行的约束

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2\frac{1}{2}$$

将上式中所有常数写成整数和一个正分数之和

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - (1 + \frac{1}{2})x_4 = 2 + \frac{1}{2}$$

分数项移到右边，整数项移到左边

$$x_2 - x_4 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

由于 $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ 所以

$$\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq \frac{1}{2} < 1$$

由于左边为整数，所以右边也为整数，所以

$$\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq 0$$

加入松弛变量

$$\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 0$$

放入单纯形表

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/387066043111006024>