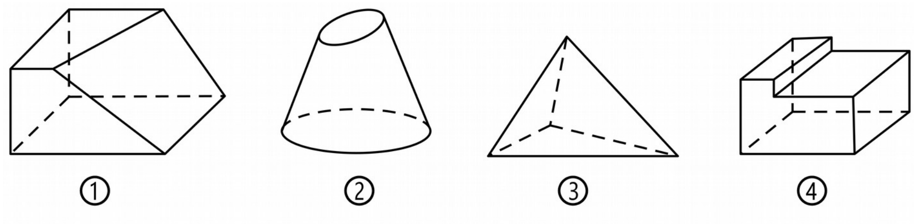
广东省深圳市南头中学2023-2024学年高一下学期期中考试

数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．如图所示，观察四个几何体，其中判断正确的是（　　）



A．①是棱台　　B．②是圆台　　C．③是棱锥　　D．④不是棱柱

2．在下列各组向量中，可以作为基底的是（　）

A．$\vec{e_1}=(0,0)$，$\vec{e_2}=(1,2)$　　B．$\vec{e_1}=(-1,2)$，$\vec{e_2}=(5,-2)$

C．$\vec{e_1}=(3,5)$，$\vec{e_2}=(6,10)$　　D．$\vec{e_1}=(2,-3)$，$\vec{e_2}=(-2,3)$

3．复数$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$则在复平面内，$z$对应的点的坐标是（　）

A．$(1,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　　D．$(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$

4．棣莫弗公式$(\cos x+\mathrm{i}\cdot\sin x)^n=\cos(nx)+\mathrm{i}\cdot\sin(nx)$（其中 i 为虚数单位）是由法国数学家

棣莫弗（1667-1754）发现的，根据棣莫弗公式可知，复数$\left(\cos\frac{\pi\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{}{3}\right)^2$在复平面内所对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

5．已知平面向量$\vec{a}=\left(\sin\alpha,\sqrt{2}\right)$，$\vec{b}=(\cos\alpha,1)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\cos 2\alpha=$（　）

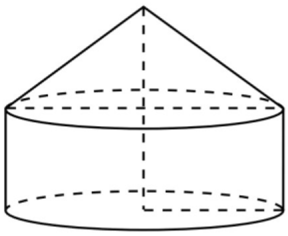
A．$-\frac{1}{3}$　　B．0　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

6．下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　）

A．$y=x^2+x$　　B．$y=\cos x$

C．$y=2^x$　　D．$y=\log_2|x|$

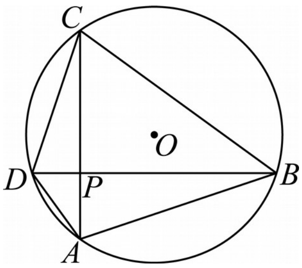
7．蒙古包（Mongolianyurts）是蒙古族牧民居住的一种房子，建造和搬迁都很方便，适于牧业生产和游牧生活，蒙古包古代称作穹庐、毡包或毡帐.已知蒙古包的造型可近似的看作一个圆柱和圆锥的组合体，已知圆锥的高为2米，圆柱的高为3米，底面圆的面积为64π平方米，则该蒙古包（含底面）的表面积为（　）



A．$(112+16\sqrt{17}\pi)$ 平方米　　B．$(80+16\sqrt{17}\pi)$ 平方米

C．$(112+18\sqrt{17}\pi)$ 平方米　　D．$(80+18\sqrt{17}\pi)$ 平方米

8．“圆幂定理”是平面几何中关于圆的一个重要定理，它包含三个结论，其中一个是相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等，如图，已知圆O的半径2，点P是圆O内的定点，且$OP=\sqrt{2}$，弦AC,BD均过点P，则下列说法错误的是（　）



A．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$为定值

B．当$AC\perp BD$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$为定值

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$的取值范围是$[-4,0]$

D．$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|$的最大值为12

二、多选题

9．（多选）下列命题中的真命题是（　）

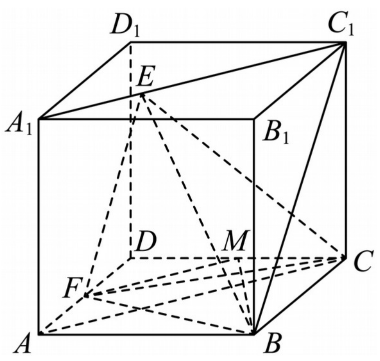
A．若直线a不在平面α内，则$a//\alpha$

B．若直线l上有无数个点不在平面α内，则$l//\alpha$

C．若$l//\alpha$，则直线l与平面α内任何一条直线都没有公共点

D．平行于同一平面的两直线可以相交

10．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，动点E在线段A_1C_1上，F、M分别是AD、CD的中点，则下列结论中正确的是（　）



A．$FM//A_1C_1$　　　　B．$BM\perp$平面CC_1F

C．存在点E，使得平面$BEF//$平面CC_1D_1D　　D．三棱锥$B-CEF$的体积为定值

11．设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，下列结论正确的是（　）

A．若$b=\sqrt{15}$，则满足条件的三角形只有1个

B．$\triangle ABC$面积的最大值为$3\sqrt{3}$

C．$\triangle ABC$周长的最大值为$6\sqrt{3}$

D．若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\frac{b}{c}$的取值范围是$\left(\frac{1}{2},2\right)$

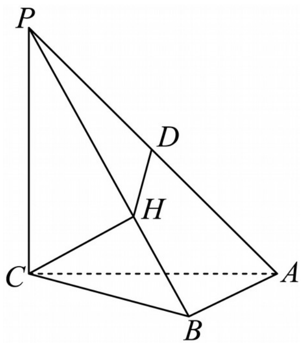
三、填空题

12．若$\overline{e_1},\overline{e_2}$是夹角为$60°$的两个单位向量，则$\vec{a}=2\overline{e_1}+\overline{e_2}$与$\vec{b}=-3\overline{e_1}+2\overline{e_2}$的夹角大小为____.

13．已知$z\in C$，且$|z+3i|=1$，i为虚数单位，则$|z-1+2i|$的最小值是____.

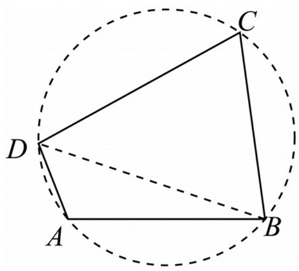
14．在三棱锥$P-ABC$中，$PC\perp$平面ABC，$\triangle PAC$是等腰直角三角形，$PA=6$，$AB\perp BC$，$CH\perp PB$，垂足为H，D为PA的中点，则当$\triangle CDH$的面积最大时，$CB=$____

.



四、解答题

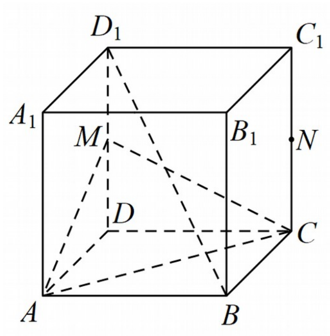
15．如图所示，我国黄海某处的一个圆形海域上有四个小岛，小岛 B 与小岛 A 、小岛 C 相距都为 5 公里，与小岛 D 相距为 $3\sqrt{5}$ 公里．已知角 A 为钝角，且 $\sin A=\frac{3}{5}$．



(1)求小岛 A 与小岛 D 之间的距离；

(2)记 $\angle CDB$ 为 α ，$\angle CBD$ 为 β ，求 $\sin(2\alpha+\beta)$ 的值.

16．如图：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=2$ ，M 为 DD_1 的中点.

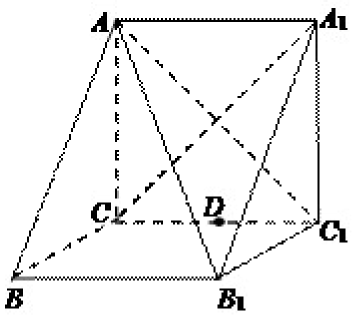


(1)求三棱锥$M-ABC$的体积；

(2)求证：$BD_1//$平面AMC；

(3)若N为CC_1的中点，求证：平面$AMC//$平面BND_1.

17．如图所示，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=2$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$.



（1）证明：$A_1C\perp$平面AB_1C_1；

（2）若D是棱CC_1的中点，在棱AB上是否存在一点E，使DE∥平面AB_1C_1？证明你的结论.

18．已知向量$\vec{a}=\left(\cos\frac{x}{2},\sin\frac{x}{2}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\frac{3x}{2},-\sin\frac{3x}{2}\right)$，且$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

(1)求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值；

(2)求$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$的取值范围；

(3)记函数 $f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-2\lambda\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，若 $f\left(x\right)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$，求实数 λ 的值.

19．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 对应的边分别为 a,b,c，

$2\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}\left(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A\right)$

(1)求 A；

(2)奥古斯丁.路易斯.柯西（*Augustin Louis Cauchy*，1789年-1857年），法国著名数学家.柯西在数学领域有非常高的造诣.很多数学的定理和公式都以他的名字来命名，如柯西不等式、柯西积分公式.其中柯西不等式在解决不等式证明的有关问题中有着广泛的应用.现在，在（1）的条件下，若 $a=2,P$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，过 P 作 AB,BC,AC 垂线，垂足分别为 D,E,F，借助于三维分式型柯西不等式：$y_1,y_2,y_3\in R^+,\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3}\geq\frac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2}{y_1+y_2+y_3}$ 当且仅当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ 时等号成立.求 $T=\frac{\left|AB\right|}{\left|PD\right|}+\frac{4\left|BC\right|}{\left|PE\right|}+\frac{\left|AC\right|}{\left|PF\right|}$ 的最小值.

参考答案：

1．C

【分析】利用几何体的结构特征进行分析判断.

【详解】对于A，不是由棱锥截来的，所以①不是棱台，故A错误；

对于B，上、下两个面不平行，所以②不是圆台；故B错误；

对于C，底面是三角形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，所以③是棱锥，故C正确.

对于D，前、后两个面平行，其他面是平行四边形，且每相邻两个四边形的公共边平行，

所以④是棱柱，故D错误.

故选：C.

2．B

【分析】根据基底需为不共线的非零向量，由此依次判断各个选项即可.

【详解】对于A，$\overrightarrow{e_1}=\vec{0}$，不可以作为基底，A错误；

对于B，$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$为不共线的非零向量，可以作为一组基底，B正确；

对于C，$\because \overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$，$\therefore \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$共线，不可以作为基底，C错误；

对于D，$\because \overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_2}$，$\therefore \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$共线，不可以作为基底，D错误.

故选：B.

3．C

【分析】先通过复数的除法运算化简复数$z=\frac{1}{2}+\frac{3\mathrm{i}}{2}$，然后利用复数的几何意义求解.

【详解】因为$z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}+\frac{3\mathrm{i}}{2}$，

所以在复平面内，z对应的点的坐标是$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

故选：C

4．B

【分析】由棣莫弗公式化简结合复数的几何意义即可得出答案.

【详解】$\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

在复平面内所对应的点为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，在第二象限.

故选：B.

5．A

【分析】利用同角三角函数的基本关系以及二倍角的余弦公式求解.

【详解】因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，即$\tan\alpha=\sqrt{2}$，

所以$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{1}{3}$，

故选:A.

6．D

【分析】利用奇偶函数的判断方法及基本函数的单调性，对各个选项逐一分析判断，即可得出结果.

【详解】对于选项A，当$x=1$时，$y=1+1=2$，当$x=-1$时，$y=1-1=0$，即$f(-1)\neq f(1)$，所以选项A不满足题意，

对于选项B，因$y=\cos x$在区间$(0,+\infty)$上不单调，所以选项B不满足题意，

对于选项C，因为$y=2^x$图象不关于y轴对称，所以选项C不满足题意，

对于选项D，令$f(x)=\log_2|x|$，易得其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，

又$f(-x)=\log_2|-x|=\log_2|x|=f(x)$，所以$y=\log_2|x|$为偶函数，

当$x>0$时，$y=\log_2|x|=\log_2 x$，又$y=\log_2 x$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以选项D满足题意，

故选：D.

7．A

【分析】由题意可求出底面圆的半径，即可求出圆锥的母线长，根据圆锥的侧面积公式以及圆柱的侧面积公式结合圆的面积公式，即可求得答案.

【详解】由题意知圆锥的高为 2 米，圆柱的高为 3 米，底面圆的面积为 64π 平方米，

设底面圆的半径为 r，则 $64\pi=\pi r^2$，$\therefore r=8$，

则圆锥的母线长为 $\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$（米），

故该蒙古包（含底面）的表面积为 $\pi\times8\times2\sqrt{17}+2\pi\times8\times3+\pi\times8^2=112\pi+16\sqrt{17}\pi$（平方米），

故选：A

8．D

【分析】过 O,P 作直径 EF，利用向量加减几何意义得

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-(|\overrightarrow{OF}|-|\overrightarrow{OP}|)(|\overrightarrow{OF}|+|\overrightarrow{OP}|)$ 判断 A；根据垂直关系及

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD})$、数量积得运算律化简判断 B；若 M 为 AC 中点，连接 OM，

应用向量线性运算的几何意义及数量积的运算律、圆的性质得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}^2-4$，进而求

范围判断 C；由弦 $|\overrightarrow{AC}|,|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值判断 D.

【详解】如图，过 O,P 作直径 EF，依题意，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|=-|\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{PE}|$

$=-(|\overrightarrow{OF}|-|\overrightarrow{OP}|)(|\overrightarrow{OF}|+|\overrightarrow{OP}|)=-(|\overrightarrow{OF}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2)=-2$ 为定值，A 正确；

若 $AC\perp BD$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$，

又 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-2$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，同理可得 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=-2$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-4$，B 正确；

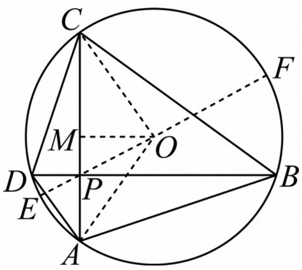
若M为AC中点，连接OM，则

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$$

$$=\overrightarrow{OM}^2-(4-\overrightarrow{OM}^2)=2\overrightarrow{OM}^2-4,$$

由题意$0\le\overrightarrow{OM}^2\le\overrightarrow{OP}^2=2$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\in[-4,0]$，C 正确；

因为$|AC|\le 4,|BD|\le 4$，则有$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\le 16$，D 错误.



故选：D

【点睛】关键点睛：根据定义及向量线性运算的几何意义，结合数量积的运算律转化各项数量积或乘积关系，再由圆的性质、基本不等式判断各项正误.

9．CD

【解析】根据直线与平面的位置关系，结合题目，进行分析和判断即可.

【详解】A中，直线a也可能与平面α相交，故A是假命题；

B中，直线l与平面α相交时，l上也有无数个点不在平面α内，故B是假命题；

C中，$l//\alpha$时，与α没有公共点，所以l与α内任何一条直线都没有公共点，故C是真命题；

D中，平行于同一个平面的直线，可以平行也可以相交，也可以是异面直线，故D是真命题.

故选：CD.

【点睛】本题考查直线与平面的位置关系，属基础题.

10．ABD