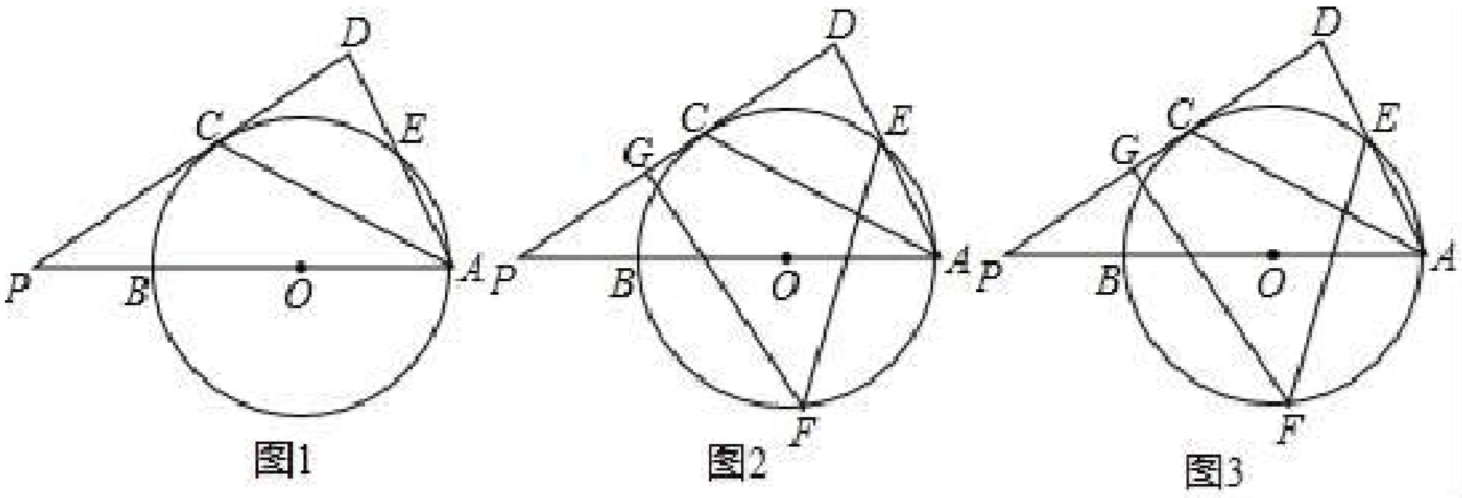
## 一、圆的综合 真题与模拟题分类汇编（难题易错题）

1．如图，点 P 在⊙O 的直径 AB 的延长线上，PC 为⊙O 的切线，点 C 为切点，连接 AC，过点 A 作 PC 的垂线，点 D 为垂足，AD 交⊙O 于点 E.

(1)如图 1，求证：∠DAC=∠PAC；

(2)如图 2，点 F（与点 C 位于直径 AB 两侧）在⊙O 上，$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FA}$，连接 EF，过点 F 作 AD 的平行线交 PC 于点 G，求证：FG=DE+DG；

(3)在(2)的条件下，如图 3，若 AE=$\frac{2}{3}$DG，PO=5，求 EF 的长.




【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）EF=3$\sqrt{2}$ .

【解析】

【分析】

（1）连接 OC，求出 OC∥AD，求出 OC⊥PC，根据切线的判定推出即可；

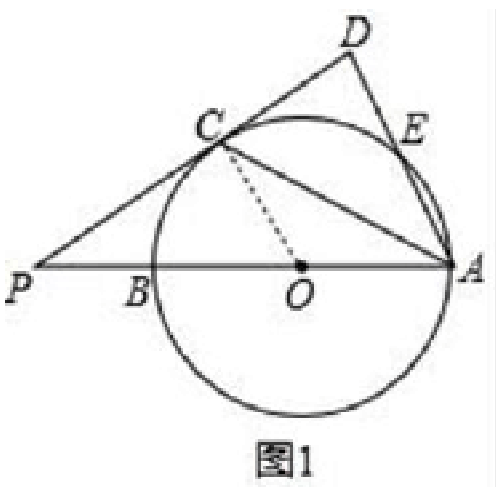
（2）连接 BE 交 GF 于 H，连接 OH，求出四边形 HGDE 是矩形，求出 DE=HG，FH=EH，即可得出答案；

（3）设 OC 交 HE 于 M，连接 OE、OF，求出∠FHO=∠EHO=45°，根据矩形的性质得出 EH∥DG，求出 OM=$\frac{1}{2}$AE，设 OM=a，则 HM=a，AE=2a，AE=$\frac{2}{3}$DG，DG=3a，

求出 ME=CD=2a，BM=2a，解直角三角形得出 tan∠MBO＝$\frac{MO}{BM}=\frac{1}{2}$，tanP=$\frac{CO}{PO}=\frac{1}{2}$,设 OC=k，则 PC=2k，根据 OP=$\sqrt{5}$k=5 求出 k=$\sqrt{5}$，根据勾股定理求出 a，即可求出答案.

【详解】

（1）证明：连接 OC，




∵PC 为⊙O 的切线，

∴ OC⊥PC，

∵ AD⊥PC，

∴ OC∥ AD，

∴∠OCA=∠DAC，

∵ OC=OA，

∴∠PAC=∠OCA，

∴∠DAC=∠PAC；

（2）证明：连接 BE 交 GF 于 H，连接 OH，

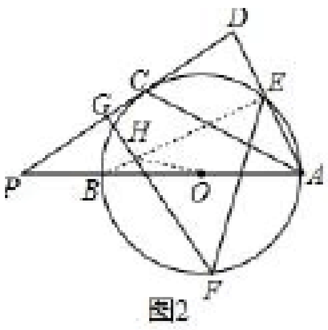


图2

∵ FG∥ AD，

∴∠FGD+∠D=180°，

∵∠D=90°，

∴∠FGD=90°，

∵ AB 为⊙O 的直径，

∴∠BEA=90°，

∴∠BED=90°，

∴∠D=∠HGD=∠BED=90°，

∴ 四边形 HGDE 是矩形，

∴ DE=GH，DG=HE，∠GHE=90°，

∵ $BF=AF$，

∴∠HEF=∠FEA=$\frac{1}{2}$∠BEA=$\frac{1}{2}\times 90^{o}$=45°，

∴∠HFE=90°﹣∠HEF=45°，

∴∠HEF=∠HFE，

∴ FH=EH，

∴ FG=FH+GH=DE+DG；

（3）解：设 OC 交 HE 于 M，连接 OE、OF，

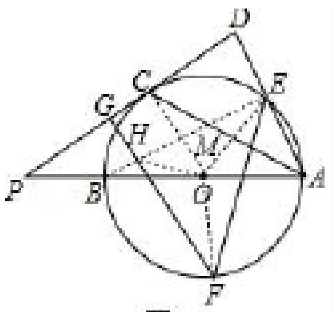


图3

∵ EH=HF，OE=OF，HO=HO，

∴△FHO≌△EHO，

∴∠FHO=∠EHO=45°，

∵ 四边形 GHED 是矩形，

∴ EH∥ DG，

∴ ∠ OMH=∠ OCP=90°，

∴ ∠ HOM=90° ﹣∠ OHM=90° ﹣45°=45°，

∴ ∠ HOM=∠ OHM，

∴ HM=MO，

∵ OM⊥BE，

∴ BM=ME，

∴ OM= $\frac{1}{2}$ AE，

设 OM=a，则 HM=a，AE=2a，AE= $\frac{2}{3}$ DG，DG=3a，

∵ ∠ HGC=∠ GCM=∠ GHE=90°，

∴ 四边形 GHMC 是矩形，

∴ GC=HM=a，DC=DG﹣GC=2a，

∵ DG=HE，GC=HM，

∴ ME=CD=2a，BM=2a，

在 Rt△ BOM 中，tan∠ MBO= $\frac{MO}{BM}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ ，

∵ EH∥ DP，

∴ ∠ P=∠ MBO，

tanP= $\frac{CO}{PO}=\frac{1}{2}$ ，

设 OC=k，则 PC=2k，

在 Rt△ POC 中，OP= $\sqrt{5}$ k=5，

解得：k= $\sqrt{5}$ ，OE=OC= $\sqrt{5}$ ，

在 Rt△ OME 中，$OM^2+ME^2=OE^2$，$5a^2=5$，

a=1，

∴ HE=3a=3，

在 Rt△ HFE 中，∠ HEF=45°，

∴ EF= $\sqrt{2}$ HE=3 $\sqrt{2}$ .

【点睛】

考查了切线的性质，矩形的性质和判定，解直角三角形，勾股定理等知识点，能综合运用性质进行推理是解此题的关键.

2．图 1 和图 2 中，优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 纸片所在⊙*O* 的半径为 2，*AB*＝2 $\sqrt{3}$ ，点 *P* 为优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点（点 *P* 不与 *A*，*B* 重合），将图形沿 *BP* 折叠，得到点 *A* 的对称点 *A′*.

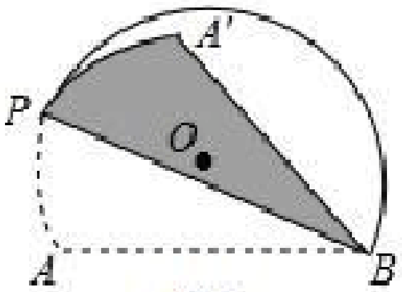


图1

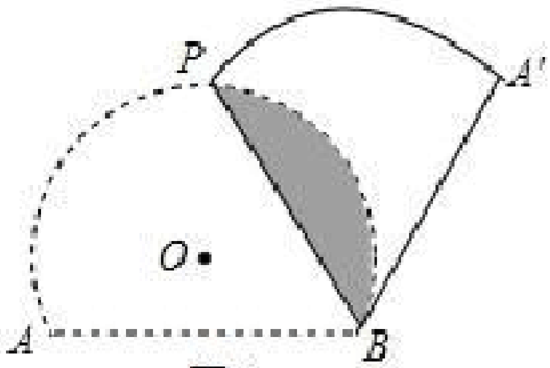


图2

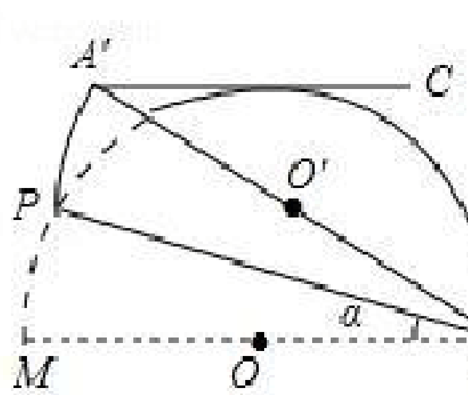


图3

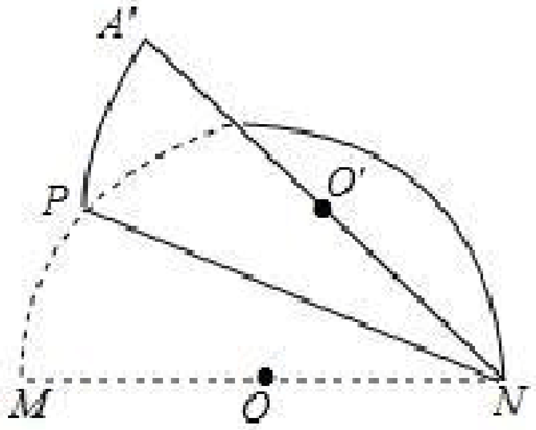


图4

发现：

（1）点 *O* 到弦 *AB* 的距离是___，当 *BP* 经过点 *O* 时，∠ *ABA′*＝___；

（2）当 *BA′*与⊙*O* 相切时，如图 2，求折痕的长．

拓展：把上图中的优弧纸片沿直径 *MN* 剪裁，得到半圆形纸片，点 *P*（不与点 *M*， *N* 重合）为半圆上一点，将圆形沿 *NP* 折叠，分别得到点 *M*，*O* 的对称点 *A′*， *O′*，设∠ *MNP*＝α．

（1）当 α＝15°时，过点 *A′*作 *A′C*∥ *MN*，如图 3，判断 *A′C* 与半圆 *O* 的位置关系，并说明理由；

（2）如图 4，当 α＝___°时，*NA′*与半圆 *O* 相切，当 α＝___°时，点 *O′*落在 $\overset{\frown}{NP}$ 上．

（3）当线段 *NO′*与半圆 *O* 只有一个公共点 *N* 时，直接写出 β 的取值范围．

【答案】发现：（1）1，60°；（2）$2\sqrt{3}$；拓展：（1）相切，理由详见解析；（2）45°；30°；（3）0°＜α＜30°或 45°≤α＜90°．

【解析】

【分析】

发现：（1）利用垂径定理和勾股定理即可求出点 O 到 AB 的距离；利用锐角三角函数的定义及轴对称性就可求出∠ ABA′．

（2）根据切线的性质得到∠ OBA′=90°，从而得到∠ ABA′=120°，就可求出∠ ABP，进而求出∠ OBP=30°．过点 O 作 OG⊥BP，垂足为 G，容易求出 OG、BG 的长，根据垂径定理就可求出折痕的长．

拓展：（1）过 A'、O 作 A'H⊥MN 于点 H，OD⊥A'C 于点 D．用含 30°角的直角三角形的性质可得 OD=A'H=$\frac{1}{2}$A'N=$\frac{1}{2}$MN=2 可判定 A′C 与半圆相切；

（2）当 NA′与半圆相切时，可知 ON⊥A′N，则可知 α=45°，当 O′在 $\overset{\frown}{PB}$ 时，连接 MO′，则可知 NO′=$\frac{1}{2}$MN，可求得∠ MNO′=60°，可求得 α=30°；

（3）根据点 A′的位置不同得到线段 NO′与半圆 O 只有一个公共点 N 时 α 的取值范围是 0°＜α＜30°或 45°≤α＜90°.

【详解】

发现：（1）过点 O 作 OH⊥AB，垂足为 H，如图 1 所示,

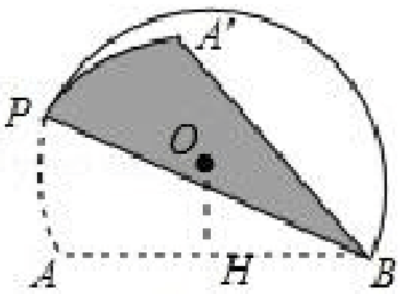


图1

∵ ⊙O 的半径为 2，AB=$2\sqrt{3}$，

∴ OH=$\sqrt{OB^2-HB^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

在△ BOH 中，OH=1，BO=2

∴ ∠ ABO=30°

∵ 图形沿 BP 折叠，得到点 A 的对称点 A′.

∴ ∠ OBA′=∠ ABO=30°

∴ ∠ ABA′=60°

（2）过点 O 作 OG⊥BP，垂足为 G，如图 2 所示.

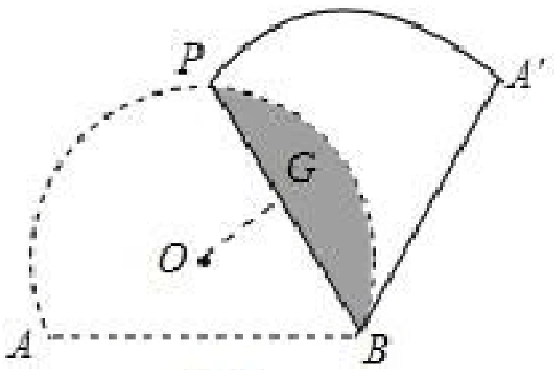


图2

∵ BA′与⊙O 相切，∴ OB⊥A′B．∴ ∠ OBA′=90°.

∵ ∠ OBH=30°，∴ ∠ ABA′=120°.

∴ ∠ A′BP=∠ ABP=60°.

∴ ∠ OBP=30°．∴ OG=$\frac{1}{2}$OB=1．∴ BG=$\sqrt{3}$.

∵ OG⊥BP，∴ BG=PG=$\sqrt{3}$.

∴ BP=$2\sqrt{3}$．∴ 折痕的长为 $2\sqrt{3}$

拓展：（1）相切.

分别过 A'、O 作 A'H⊥MN 于点 H，OD⊥A'C 于点 D．如图 3 所示，

∵ A'C∥ MN

∴ 四边形 A'HOD 是矩形

∴ A'H=O

∵ α=15°∴ ∠ A'NH=30

∴ OD=A'H=$\frac{1}{2}$A'N=$\frac{1}{2}$MN=2

∴ A'C 与半圆

（2）当 NA′与半圆 O 相切时，则 ON⊥NA′，

∴∠ONA′=2α=90°，

∴α=45

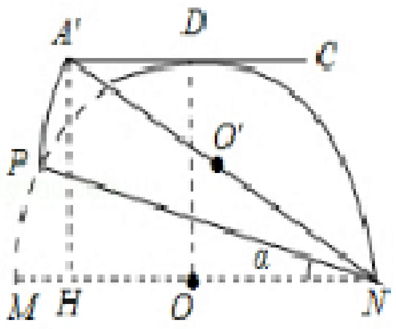


图3

当 O′在 $PB$ 上时，连接 MO′，则可知 NO′=$\frac{1}{2}$MN，

∴∠O′MN=0°

∴∠MNO′=60°，

∴α=30°，

故答案为：45°；30°.

（3）∵点 P，M 不重合，∴α＞0，

由（2）可知当 α 增大到 30°时，点 O′在半圆上，

∴当 0°＜α＜30°时点 O′在半圆内，线段 NO′与半圆只有一个公共点 B；

当 α 增大到 45°时 NA′与半圆相切，即线段 NO′与半圆只有一个公共点 B.

当 α 继续增大时，点 P 逐渐靠近点 N，但是点 P，N 不重合，

∴α＜90°，

∴当 45°≤α＜90°线段 BO′与半圆只有一个公共点 B.

综上所述 0°＜α＜30°或 45°≤α＜90°.

【点睛】

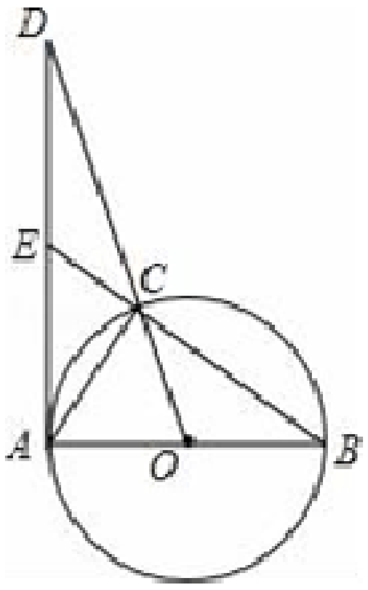
本题考查了切线的性质、垂径定理、勾股定理、三角函数的定义、30°角所对的直角边等于斜边的一半、翻折问题等知识，正确的作出辅助线是解题的关键.

3．如图，已知 AB 是⊙O 的直径，点 C 为圆上一点，点 D 在 OC 的延长线上，连接 DA，交 BC 的延长线于点 E，使得∠DAC=∠B.

（1）求证：DA 是⊙O 切线；

（2）求证：△CED∽△ACD；

（3）若 OA=1，sinD=$\frac{1}{3}$，求 AE 的长.




【答案】（1）证明见解析；（2）$\sqrt{2}$

【解析】

分析：（1）由圆周角定理和已知条件求出 $AD\perp AB$ 即可证明 $DA$ 是⊙$O$ 切线；

（2）由$\angle DAC=\angle DCE$，$\angle D=\angle D$ 可知△$DEC$∽△$DCA$；

（3）由题意可知 $AO=1$，$OD=3$，$DC=2$，由勾股定理可知 $AD=2$，故此可得到 $DC^2=DE\bullet AD$，故此可求得 $DE$ 的长，于是可求得 $AE$ 的长．

详解：（1）∵$AB$ 为⊙$O$ 的直径，∴$\angle ACB=90°$，∴$\angle CAB+\angle B=90°$．

∵$\angle DAC=\angle B$，∴$\angle CAB+\angle DAC=90°$，∴$AD\perp AB$．

∵$OA$ 是⊙$O$ 半径，∴$DA$ 为⊙$O$ 的切线；

（2）∵$OB=OC$，∴$\angle OCB=\angle B$．

∵$\angle DCE=\angle OCB$，∴$\angle DCE=\angle B$．

∵$\angle DAC=\angle B$，∴$\angle DAC=\angle DCE$．

∵$\angle D=\angle D$，∴△$CED$∽△$ACD$；

（3）在 Rt△$AOD$ 中，$OA=1$，$\sin D=\frac{1}{3}$，∴$OD=\frac{OA}{\sin D}=3$，∴$CD=OD-OC=2$．

∵$AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=2\sqrt{2}$．

又∵△$CED$∽△$ACD$，∴$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DE}$，∴$DE=\frac{CD^2}{AD}=\sqrt{2}$，

∴$AE=AD-DE=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$．

点睛：本题主要考查的是切线的性质、圆周角定理、勾股定理的应用、相似三角形的性质和判定，证得△$DEC$∽△$DCA$ 是解题的关键．

4．如图，已知⊙O 的半径为 1，PQ 是⊙O 的直径，n 个相同的正三角形沿 PQ 排成一列，所有正三角形都关于 PQ 对称，其中第一个△$A_1B_1C_1$ 的顶点 $A_1$ 与点 P 重合，第二个△$A_2B_2C_2$ 的顶点 $A_2$ 是 $B_1C_1$ 与 PQ 的交点，…，最后一个△$A_nB_nC_n$ 的顶点 $B_n$、$C_n$ 在圆上．如图 1，当 n=1 时，正三角形的边长 $a_1$=_____；如图 2，当 n=2 时，正三角形的边长 $a_2$=_____；如图 3，正三角形的边长 $a_n$=_____（用含 n 的代数式表示）．

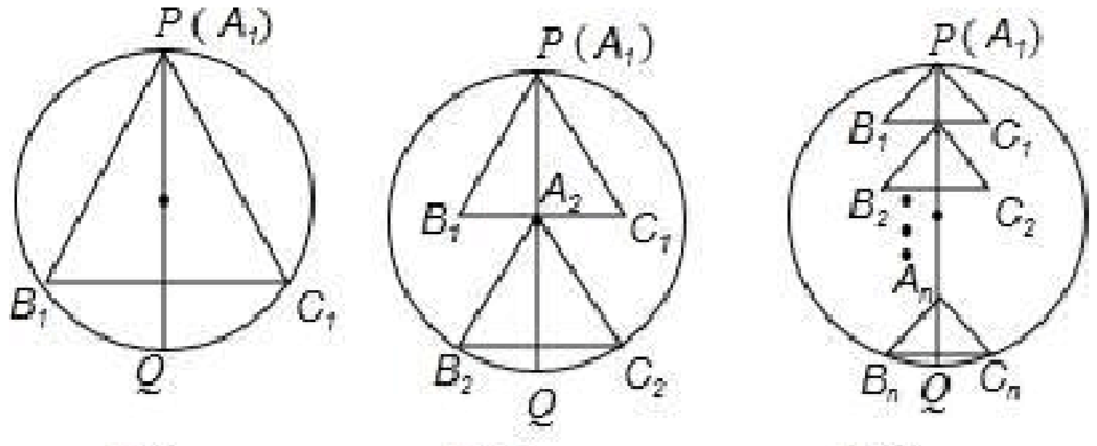



图1　　　图2　　　图3

【答案】$\sqrt{3}$　$\frac{8}{13}\sqrt{3}$　$\frac{4n\sqrt{3}}{1+3n^2}$

【解析】

分析：（1）设 PQ 与 $B_1C_1$ 交于点 D，连接 $B_1O$，得出 OD= $A_1D$ -O $A_1$，用含 $a_1$ 的代数式表示 OD，在△ O $B_1$ D 中，根据勾股定理求出正三角形的边长 $a_1$；（2）设 PQ 与 $B_2C_2$ 交于点 E，连接 $B_2$ O，得出 OE= $A_1$ E-O $A_1$，用含 $a_2$ 的代数式表示 OE，在△ O $B_2$ E 中，根据勾股定理求出正三角形的边长 $a_2$；（3）设 PQ 与 $B_n$ $C_n$ 交于点 F，连接 $B_n$ O，得出 OF= $A_1$ F-O $A_1$，用含 an 的代数式表示 OF，在△ O $B_n$ F 中，根据勾股定理求出正三角形的边长 an.

本题解析：

(1)易知△ $A_1B_1C_1$ 的高为 $\frac{3}{2}$，则边长为 $\sqrt{3}$，

$\therefore a_1=\sqrt{3}$.

(2)设△ $A_1B_1C_1$ 的高为 $h$，则 $A_2O=1-h$，连结 $B_2O$，设 $B_2C_2$ 与 $PQ$ 交于点 $F$，则有 $OF=2h-1$.

$\because B_2O^2=OF^2+B_2F^2$，$\therefore 1=(2h-1)^2+\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$.

$\because h=\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$，$\therefore 1=(\sqrt{3}a_2-1)^2+\frac{1}{4}a_2^2$，

解得 $a_2=\frac{8\sqrt{3}}{13}$ .

(3)同(2)，连结 $B_nO$，设 $B_nC_n$ 与 $PQ$ 交于点 $F$，则有 $B_nO^2=OF^2+B_nF^2$，

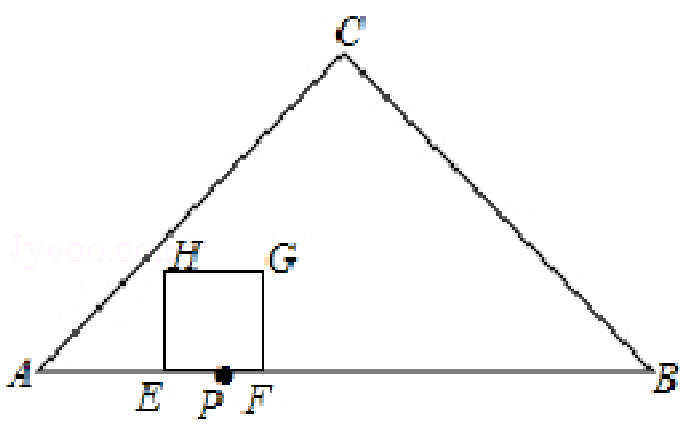
即 $1=(nh-1)^2+\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2$ .

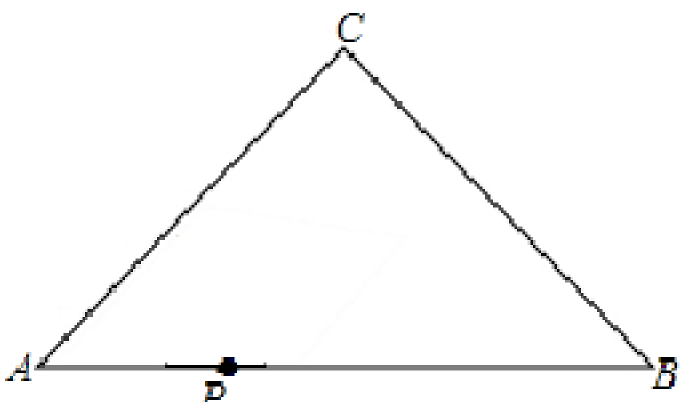
$\because h=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$，$\therefore 1=\frac{1}{4}a_n^2+\left(\frac{\sqrt{3}na_n}{2}-1\right)^2$，

解得 $a_n=\frac{4\sqrt{3}n}{3n^2+1}$ .

5．如图．在△ $ABC$ 中，∠ $C=90°$，$AC=BC$，$AB=30cm$，点 $P$ 在 $AB$ 上，$AP=10cm$，点 $E$ 从点 $P$

出发沿线段 $PA$ 以 2cm/s 的速度向点 $A$ 运动，同时点 $F$ 从点 $P$ 出发沿线段 $PB$ 以 1cm/s 的速度向点 $B$ 运动，点 $E$ 到达点 $A$ 后立刻以原速度沿线段 $AB$ 向点 $B$ 运动，在点 $E$、$F$ 运动过程中，以 $EF$ 为边作正方形 $EFGH$，使它与△ $ABC$ 在线段 $AB$ 的同侧，设点 $E$、$F$ 运动的时间为 $t$（$s$）（$0<t<20$）.



备用图

（1）当点 $H$ 落在 $AC$ 边上时，求 $t$ 的值；

（2）设正方形 $EFGH$ 与△ $ABC$ 重叠部分的面积为 $S$．①试求 $S$ 关于 $t$ 的函数表达式；②以点 $C$ 为圆心，$\frac{1}{2}t$ 为半径作⊙$C$，当⊙$C$ 与 $GH$ 所在的直线相切时，求此时 $S$ 的值．

【答案】（1）t=2s 或 10s；（2）①S=$\begin{cases} 9t^2 ? & (0<t\le 2) \\ -\frac{7}{2}t^2+50t-50 & (2<t\le 10) \\ t^2-40t+400 ? & (10<t<20) \end{cases}$；②100cm$^2$.

【解析】

试题分析：（1）如图 1 中，当 $0<t\le5$ 时，由题意 $AE=EH=EF$，即 $10-2t=3t$，$t=2$；如图 2 中，当 $5<t<20$ 时，$AE=HE$，$2t-10=10-(2t-10)+t$，$t=10$；

（2）分四种切线讨论 $a$、如图 3 中，当 $0<t\le2$ 时，重叠部分是正方形 $EFGH$，$S=(3t)^2=9t^2$．$b$、如图 4 中，当 $2<t\le5$ 时，重叠部分是五边形 $EFGMN$．$c$、如图 5 中，当 $5<t<10$ 时，重叠部分是五边形 $EFGMN$．$d$、如图 6 中，当 $10<t<20$ 时，重叠部分是正方形 $EFGH$．分别计算即可；

②分两种情形分别列出方程即可解决问题．

试题解析：解：（1）如图 1 中，当 $0<t\le5$ 时，由题意得：$AE=EH=EF$，即 $10-2t=3t$，$t=2$

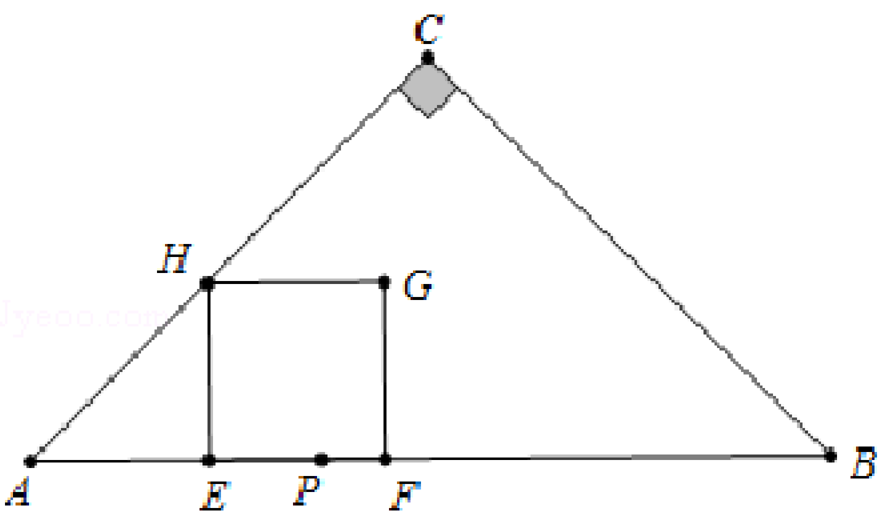


图1

如图 2 中，当 $5<t<20$ 时，$AE=HE$，$2t-10=10-(2t-10)+t$，$t=10$．

综上所述：$t=2s$ 或 $10s$ 时，点 $H$ 落在 $AC$ 边上．

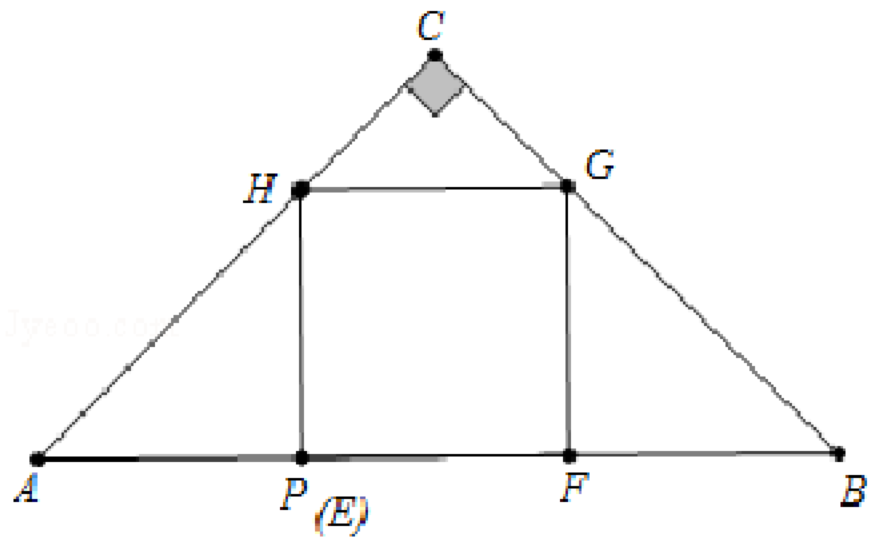


图2

（2）①如图 3 中，当 $0<t\le 2$ 时，重叠部分是正方形 $EFGH$，$S=(3t)^2=9t^2$

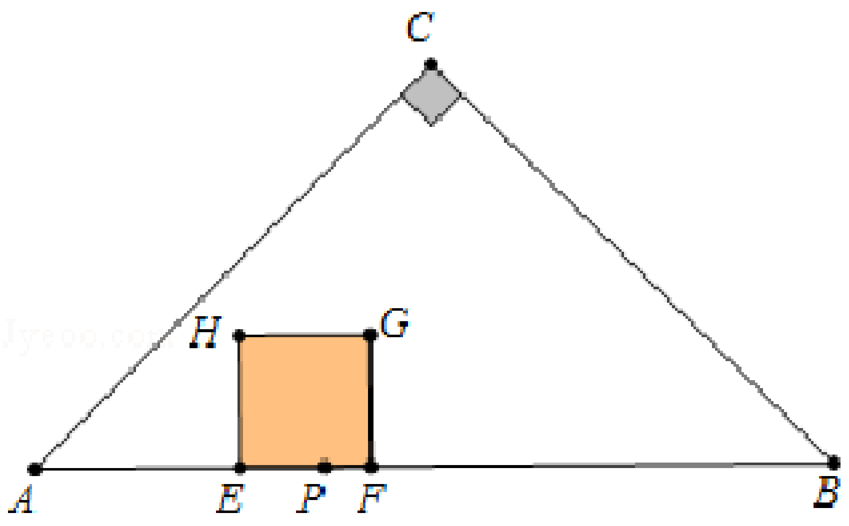


图3

如图 4 中，当 $2<t\le 5$ 时，重叠部分是五边形 $EFGMN$，$S=(3t)^2-\frac{1}{2}(5t-10)^2=-\frac{7}{2}t^2+50t-50$．

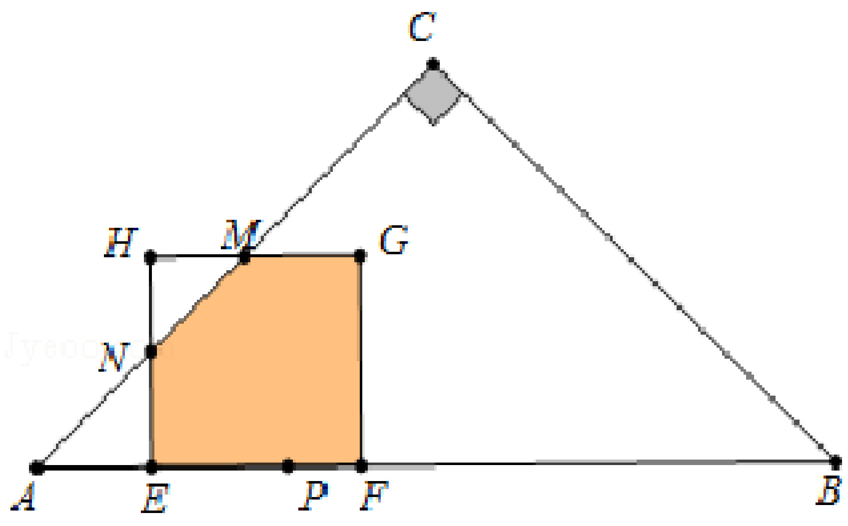


图4

如图 5 中，当 $5<t<10$ 时，重叠部分是五边形 $EFGMN$，$S=(20-t)^2-\frac{1}{2}(30-3t)^2=-\frac{7}{2}t^2+50t-50$．