【高中数学竞赛真题•强基计划真题考前适应性训练】

专题 14 初等数论 真题专项训练（全国竞赛+强基计划专用）

一、单选题

1．（2021·北京·高三强基计划）2021 年是北大建校 123 周年，则满足建校 n 周年的正整数 n 能整除对应年份的 n 的个数为（　）

A．4　　　　B．8　　　　C．12　　　　D．前三个选项都不对

【答案】B

【分析】根据题设可得 $n|1898$，从而可根据 1898 的因数分解可求 n 的个数.

【详解】根据题意，有 $n|(n+(2021-123)) \Rightarrow n|1898 \Rightarrow n|2\cdot 13\cdot 73$，

因此所有 1898 的正约数均符合题意，有 $2^3=8$ 个.

故选：B.

2．（2021·北京·高三强基计划）设 a，b 是正整数 n 的正因数，使得 $(a-1)(b+2)=n-2$，则 n 可以等于（　）

A．2020^{2020}　　　　B．2×2020^{2020}

C．3×2020^{2020}　　　　D．前三个选项都不对

【答案】B

【分析】根据整除性可得 $b=a$ 或 $b=2a$，从而可得正确的选项.

【详解】根据题意，有 $ab+2a-b=n$，

于是 $\begin{cases} a|n, \\ b|n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|ab+2a-b, \\ b|ab+2a-b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|b, \\ b|2a, \end{cases}$

于是 $b=a$ 或 $b=2a$，从而 $n=a(a+1)$ 或 $n=2a^2$，只有选项 B 符合.

故选：B.

3．（2021·北京·高三强基计划）2019^{2020} 在十进制下的末两位数字是（　）

A．01　　　　B．21　　　　C．81　　　　D．前三个选项都不对

【答案】A

【分析】根据同余及二项定理可判断末两位数字，也可以利用欧拉函数的性质来判断末两位数字.

【详解】法 1：根据题意，有:

$2019^{2020} \equiv 19^{2020} = (20-1)^{2020} \equiv \mathrm{C}_{2020}^{1} \times 20 \times (-1)^{2019} + (-1)^{2020} \equiv 1 \pmod{100}$.

法 2：根据欧拉函数的性质由 $\varphi(25)=\varphi(5^2)=5\times4=20$， 而 $(19,25)=1$，

故 $19^{\varphi(25)}=19^{20}\equiv1(\bmod 25)$， 故 $2019^{2020}\equiv1(\bmod 25)$，

而 $2019^{2020}\equiv(-1)^{2020}=1(\bmod 4)$， 因此 $2019^{2020}\equiv1(\bmod 100)$．

故选：A

4．（2021·北京·高三强基计划）设 n 为正整数，且 4^n+2021 是完全平方数，则这样的 n 的个数为（　　）

A．1　　　　B．2

C．无穷个　　　　D．前三个选项都不对

【答案】A

【分析】利用因数分解可求不定方程的解.

【详解】设 $4^n+2021=m^2$， 则 $(m+2^n)(m-2^m)=2021=43\times47$，

注意到 $(m+2^n)-(m-2^n)=2^{n+1}>0$

故 $\begin{cases}m+2^n=47\\m-2^n=43\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+2^n=2021\\m-2^n=1\end{cases}$， 解得 $\begin{cases}m=45\\n=1\end{cases}$，

从而符合题意的正整数 n 只有 1 个.

故选：A.

5．（2021·北京·高三强基计划）设 $y_n=1\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}1$， 若 $10^9-1\mid y_n$， 则 n 的最小值为（　　）

A．71　　　　B．72　　　　C．80　　　　D．81

【答案】C

【分析】利用整除性和二项式定理可得 $n+1=9k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$， 再利用

$10^{9(k-1)}+10^{9(k-2)}+\cdots+10^9+1$ 模 9 的余数为 k，可求 k 的最小值，故可求 n 的最小值.

【详解】根据题意，有 $y_n=1\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}1=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}\times11=\dfrac{11\left(10^{n+1}-1\right)}{9}$，

因此 $10^9-1\left|y_n\Rightarrow10^9-1\right|\dfrac{11\left(10^{n+1}-1\right)}{9}\Rightarrow9\left(10^9-1\right)\left|11\left(10^{n+1}-1\right)\right.$.

而 $10^9-1\equiv-2(\bmod 11)$， 故 $9\left(10^9-1\right)\left|\left(10^{n+1}-1\right)\right.$，

所以 $\left(10^9-1\right)\left|\left(10^{n+1}-1\right)\right.$，

设 $n+1=9k+r,0\le r\le8$， 则 $10^{n+1}=10^{9k+r}=10^{9k}\times10^r-1=\left(10^9-1+1\right)^k\times10^r-1$，

由二项式定理可得$\left(10^9-1+1\right)^k\times10^r-1=A\left(10^9-1\right)+10^r-1$，其中 A 为正整数，

因为$\left(10^9-1\right)\left|\left(10^{n+1}-1\right)\right.$，故$r=0$，故$n+1=9k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$.

则$10^{n+1}-1=10^{9k}-1=\left(10^9-1\right)\left[10^{9(k-1)}+10^{9(k-2)}+\cdots+10^9+1\right]$，

考虑$10^{9(k-1)}+10^{9(k-2)}+\cdots+10^9+1$模 9 的余数为 k，

因此 k 的最小值为 9，从而 n 的最小值为 80.

故选：C.

6．（2021·北京·高三强基计划）方程$x^3+y^4=z^5$的正整数解(x,y,z)的组数为（　）

A．0　　B．2　　C．无穷多　　D．以上答案都不对

【答案】C

【分析】通过特例可得不定方程的正整数解的个数为无穷多个.

【详解】尝试$\left(x^3,y^4,z^5\right)=\left(2^n,2^n,2^{n+1}\right)$，即$(x,y,z)=\left(2^{\frac{n}{3}},2^{\frac{n}{4}},2^{\frac{n+1}{5}}\right)$，

只需要$\begin{cases}n\equiv0(\bmod 3),\\n\equiv0(\bmod 4),\Rightarrow n\equiv24(\bmod 60)\\n\equiv4(\bmod 5),\end{cases}$，

因此对应的$(x,y,z)=\left(2^{20k+8},2^{15k+6},2^{12k+5}\right),k\in\mathbf{N}$，

因此所求正整数解有无穷多组.

故选：C.

7．（2021·北京·高三强基计划）已知$S=\sum_{i=0}^{2021}\left[\frac{2^i}{7}\right]$，则 S 的个位数字是（　）

A．4　　B．5　　C．7　　D．以上答案都不对

【答案】B

【分析】利用二项式定理可得$\left[\frac{2^i}{7}\right]$不同的形式，再利用公式可求S，故可求 S 的个位数字.

【详解】注意到2^i模 7 的余数，有$\left[\frac{2^i}{7}\right]=\begin{cases}\frac{2^i-1}{7}, i\equiv 0(\bmod 3),\\ \frac{2^i-2}{7}, i\equiv 1(\bmod 3),\\ \frac{2^i-4}{7}, i\equiv 2(\bmod 3),\end{cases}$

因此$S=\sum_{i=0}^{2021}\frac{2^i}{7}-674\times\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right)=\frac{2^{2022}-1}{7}-674$，

考虑到$\frac{2^{2022}-1}{7}=\frac{8^{674}-1}{7}=8^{673}+8^{672}+\cdots+1$，

注意到 8 的方幂的尾数以 8，4，2，6 为一循环，因此

$\frac{2^{2022}-1}{7}\equiv 1+(8+4+2+6)\times 168+8\equiv 9(\bmod 10)$，

从而 S 的个位数字为 5.

故选：B.

8．（2021·北京·高三强基计划）方程$x^2-2xy+3y^2-4x+5=0$的整数解的组数为（　）

A．0　　　B．1　　　C．2　　　D．以上答案都不对

【答案】C

【分析】利用判别式可求$y=1$，从而可得整数解的组数.

【详解】题中方程即$x^2-(2y+4)x+3y^2+5=0$，

其判别式$\Delta=(2y+4)^2-4\left(3y^2+5\right)=4\left(-2y^2+4y-1\right)\geq 0$，

满足该不等式的整数y只有$y=1$，因此方程变为$x^2-6x+8=0\Rightarrow x=2$或$x=4$，

因此所求整数解的组数为 2 组.

故选：C.

9．（2020·北京·高三强基计划）已知整数数列$\{a_n\}(n\geq 1)$满足$a_1=1,a_2=4$，且对任意$n\geq 2$，有$a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=2^{n-1}$，则$a_{2020}$的个位数字是（　）

A．8　　　B．4　　　C．2　　　D．前三个答案都不对

【答案】A

【分析】根据递推关系可得$a_{n+2}=4a_{n+1}-2a_n$，从而各项个位数字周期性出现，故可得正确的选项.

【详解】根据题意，有$a_{n+1}^2-a_{n+2}a_n=2\left(a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}\right)$，

因此$\dfrac{a_{n+2}+2a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}+2a_{n-1}}{a_n}=\cdots=\dfrac{a_3+2a_1}{a_2}=4$，

从而$a_{n+2}=4a_{n+1}-2a_n$，

于是a_n模 10 的余数为

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n(\bmod 10)$	1	4	4	8	4	0	2	8	8	6
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a_n(\bmod 10)$	8	0	4	6	6	2	6	0	8	2
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$a_n(\bmod 10)$	2	4	2	0	6	4	4	8	4	0

从第 2 项起，以 24 为周期，因此$a_{2020}\equiv a_4\equiv 8(\bmod 10)$.

故选 A.

10．（2021·北京·高三强基计划）设正整数$n\le 2021$，且n^5-5n^3+4n+7是完全平方数，则可能的n的个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．以上答案都不对

【答案】D

【分析】可证明n^5-5n^3+4n+7模 4 余 3，故可得正确的选项.

【详解】意到$n^5-5n^3+4n+7=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+7$，

而连续的 5 个整数的乘积必然被 4 整除，

因此n^5-5n^3+4n+7模 4 余 3，不可能是完全平方数.

故选：D.

11．（2020·北京·高三强基计划）对于不小于 3 的正整数n，若存在正整数$1\le k\le n-1$使得$\mathrm{C}_n^{k-1},\mathrm{C}_n^k,\mathrm{C}_n^{k+1}$构成等差数列，其中$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$为组合数，则称$n$为“理想数”．不超过 2020 的“理想数"的个数为（　）

A．40　　B．41　　C．42　　D．前三个答案都不对

【答案】C

【分析】利用组合数的计算公式可得关于 k 的方程，从而可判断“理想数”的个数.

【详解】$C_n^{k-1},C_n^k,C_n^{k+1}$ 成等差数列，即 $\dfrac{2n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

也即 $2(k+1)(n-k+1)=k(k+1)+(n-k+1)(n-k)$，

整理得 $k=\dfrac{n\pm\sqrt{n+2}}{2}$，

当 $n+2$ 为完全平方数时，k 为正整数，考虑到 $n+2\geq5$，

因此 $n+2=3^2,4^2,\cdots,44^2(44^2=1936,45^2=2025)$，

故不超过 2020 的“理想数”的个数为 42.

故选：C.

12．(2020·北京·高三强基计划）在 $(2019\times2020)^{2021}$ 的全体正因数中选出若干个，使得其中任意两个的乘积都不是平方数则最多可选因数个数为（　）

A．16　　B．31　　C．32　　D．前三个答案都不对

【答案】C

【分析】我们定义从 $(2019\times2020)^{2021}$ 的全体正因数组成的集合 G 中选出若干个组成集合 K 为“好的”，当且仅当其中任意两个的乘积都不是平方数，可以证明若 K 是“好的”，且 $k\in K$，而 $k=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为质数，$k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{N}^*$，那么将其替换为 $k'=p_1^{k_1'}p_2^{k_2'}\cdots p_n^{k_n'}$，其中 $k_i'=\begin{cases}0,2\mid k_i,\\1,2\nmid k_i,\end{cases}i=1,2,\cdots$，则 K 仍然是“好的”．故可求可选因数个数的最大值.

【详解】考虑到 $2019=3\times673,2020=2^2\times5\times101$，于是

$(2019\times2020)^{2021}=2^{4042}\times3^{2021}\times5^{2021}\times101^{2021}\times673^{2021}$.

我们定义从 $(2019\times2020)^{2021}$ 的全体正因数组成的集合 G 中选出若干个组成集合 K 为‘好的”，当且仅当其中任意两个的乘积都不是平方数.

容易证明，若 K 是“好的”，且 $k\in K$，而 $k=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$，

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为质数，$k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{N}^*$，

那么将其替换为 $k'=p_1^{k_1'}p_2^{k_2'}\cdots p_n^{k_n'}$，

其中 $k_i' = \begin{cases} 0, 2 \mid k_i, \\ 1, 2 \nmid k_i, \end{cases} i = 1,2,\cdots$ ，

则 K 仍然是“好的”.

因此任何“好的”集合 K 中的元素都可以简化后对应于 $\{2,3,5,101,673\}$ 的某个子集，如

$2^3 \times 3^4 \times 5^7 \to 2 \times 5 \to \{2,5\}$，

于是 K 中的元素最多有 $2^5 = 32$ 个，且 $\{2,3,5,101,673\}$ 的所有子集对应的 32 个数组成的集合是“好的”，因此最多可选因数个数为 32.

故选：C.

13.（2020·北京·高三强基计划）方程 $19x + 93y = 4xy$ 的整数解个数为（　）

A．4　　　　B．8　　　　C．16　　　　D．前三个答案都不对

【答案】B

【分析】利用因式分解可求不定方程的解的个数.

【详解】题中方程即 $4x \cdot 4y - 19 \cdot 4x - 93 \cdot 4y = 0 \Rightarrow (4x-93)(4y-19) = 3 \times 19 \times 31$，

考虑到 $4x - 93 \equiv 3 \pmod 4$ 且 $4y - 19 \equiv 1 \pmod 4$，且 3，19，31 模 4 均为 3，

于是 $4x-93$ 的所有可能取值为 $3,19,31,3\times19\times31,-1,-3\times19,-3\times31,-19\times31$，共 8 个.

故选：B.

14.（2019·北京·高三校考强基计划）已知不定方程 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 = 799$ 有正整数解，则正整数 n 的最小值为（　）

A．11　　　　B．13　　　　C．15　　　　D．17

【答案】C

【分析】利用 $x^4 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{16}, x \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 \pmod{16}, x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$ 可得 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4$ 模 16 的余数的范围，结合 $799 \equiv 15 \pmod{16}$ 可求正整数 n 的最小值.

【详解】由于 $x^4 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{16}, x \equiv 0 \pmod 2, \\ 1 \pmod{16}, x \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$

于是 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4$ 模 16 的余数在 0 和 n 之间.

又 $799 \equiv 15 \pmod{16}$，于是 $n \ge 15$．注意到 $5^4 + 3^4 + 3^4 + \underbrace{1^4 + 1^4 + \cdots + 1^4}_{12个} = 799$，

因此正整数 n 的最小值为 15.

故选：C.

15．（2019·北京·高三校考强基计划）满足方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{100}$的有序正整数组$(x,y)$的个数为（　）

A．12　　B．13　　C．24　　D．25

【答案】A

【分析】反表示后根据整除性可得有序正整数组的个数.

【详解】根据题意，有$y=\frac{100x}{3x-100}=\frac{100}{3}+\frac{2^4\cdot 5^4}{3(3x-100)}$，

于是$3x-100=2^m\cdot 5^n$，其中$m+n$为奇数，且$m,n\in\{0,1,2,3,4\}$.

这样的(m,n)有 12 对，

因此对应的(x,y)也有 12 对.

故选：A.n

16．（2019·北京·高三校考强基计划）在十进制数下，设 a 是4444^{4444}的各位数字之和，而 b 是 a 的各位数字之和，则 b 的各位数字之和是（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．16

【答案】C

【分析】先估计a,b的范围，再根据模 9 同余可求 b 的各位数字之和.

【详解】设 c 是 b 的各位数字之和，

由于$4444\lg 4444<4444\times 4=17776$，于是$a<17776\times 9=159984$，

因此$b<1+9\times 5=46$.

进而$c<4+9=13$.

又$4444^{4444}\equiv a\equiv b\equiv c(\bmod 9)$，

而$4444^{4444}\equiv(-2)^{444}\equiv 64^{740}\times 16\equiv 7(\bmod 9)$，

这样就得到了$c=7$.

故选：C

17．（2021·北京·高三强基计划）若$x_1,x_2,\cdots,x_7$为非负整数，则方程

$x_1+x_2+\cdots+x_7=x_1x_2\cdots x_7$的解有（　）

A．83 组　　B．84 组

C．85 组　　D．以上答案都不对

【答案】C

【分析】就$x_1x_2\cdots x_7=0$及$x_1x_2\cdots x_7\neq 0$分类讨论，后者可利用放缩法得到

$x_1=x_2=x_3=x_4=1$，再就 $x_5=1$、$x_5=2$ 分类讨论后可得所有解的个数.

【详解】若 $x_1x_2\cdots x_7=0$，则 $x_1=x_2=\cdots=x_7=0$，

此时 $(x_1,x_2,\cdots,x_7)=(0,0,\cdots,0)$ 是满足条件的一组解.

若 $x_1x_2\cdots x_7\neq 0$，不妨设 $0<x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_7$，则 $x_1x_2\cdots x_7\leq 7x_7\Rightarrow x_1x_2\cdots x_6\leq 7$，

此时必有 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$（否则 $x_4x_5x_6\geq 2^3=8>7$，矛盾），因此问题即

$x_5x_6x_7=4+x_5+x_6+x_7$

且由 $x_5x_6\leq 7$，可得 $x_5=1,2$.

情形一 $x_5=1$，此时 $x_6x_7=5+x_6+x_7\Rightarrow(x_6-1)(x_7-1)=6$，

解得 $(x_6,x_7)=(2,7),(3,4)$.

情形二 $x_5=2$，此时 $2x_6x_7=6+x_6+x_7\Rightarrow(2x_6-1)(2x_7-1)=13$，无解.

综上所述，$(x_1,x_2,\cdots,x_7)=(0,0,\cdots,0),(1,1,1,1,1,2,7),(1,1,1,1,1,3,4)$ 及其对称式，有 85 组解.

故选：C.

18.（2021·北京·高三强基计划）设 a_n 是与 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 的差的绝对值最小的整数，b_n 是与 $\sqrt{2n}$ 的差的绝对值最小的整数. 记 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $2T_{100}-S_{100}$ 的值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．以上答案都不对

【答案】A

【分析】根据整数的性质可得 $a_{2k(k-1)+1}=\cdots=a_{2k(k+1)}=k$ 且 $b_{\frac{k(k-1)}{2}+1}=\cdots=b_{\frac{k(k+1)}{2}}=k$，故可求 $2T_{100}-S_{100}$ 的值.

【详解】容易证明 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 的小数部分不可能为 0.5，因此 $a_n=k\Rightarrow k-\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{n}{2}}<k+\frac{1}{2}$，

整理可得 $2k^2-2k+\frac{1}{2}<n<2k^2+2k+\frac{1}{2}\Rightarrow 2k(k-1)+1\leq n\leq 2k(k+1)$，

故 $a_{2k(k-1)+1}=\cdots=a_{2k(k+1)}=k$，

注意到当 $k=6$ 时，$2k(k+1)=84$，因此 $S_{100}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k}\cdot 4k\right)+\frac{1}{7}\times(100-84)=26\frac{2}{7}$.

类似的，有 $b_n = k \Rightarrow k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2}$，

整理可得 $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{1}{8}<n<\frac{k(k+1)}{2}+\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2}+1 \le n \le \frac{k(k+1)}{2}$，

故 $b_{\frac{k(k-1)}{2}+1}=\cdots=b_{\frac{k(k+1)}{2}}=k$，

注意到当 $k=13$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=91$，因此 $T_{100}=\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{1}{k}\cdot k\right)+\frac{1}{14}\times(100-91)=13\frac{9}{14}$.

综上所述，有 $2T_{100}-S_{100}=1$.

故选：A.

二、多选题

19.（2021·北京·高三校考强基计划）若 x，y 为两个不同的质数，n 为不小于 2 的正整数且 $(x+y)\mid x^n+y^n$，则（　）

A．存在奇数 n 符合题意　　B．不存在奇数 n 符合题意

C．存在偶数 n 符合题意　　D．不存在偶数 n 符合题意

【答案】AD

【分析】利用因式分解可判断 AB 的正误，利用递推可判断 CD 的正误.

【详解】当 n 是奇数时，有 $x^n+y^n=(x+y)\left(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+y^{n-1}\right)$，

于是 $(x+y)\mid x^n+y^n$，故选项 A 正确，选项 B 错误.

当 n 是偶数时，当 $n=2$ 时，有 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，

若 $x+y\mid 2xy$，则 $2xy=t(x+y)$，其中 t 为正整数，故 $x\mid y$ 且 $y\mid x$，

而 x,y 为质数，则 $x=y$，这与题设矛盾，故 $x+y\nmid 2xy$，

于是 $(x+y)\nmid x^2+y^2$.

当 $n\ge 4$，注意到 $x^n+y^n=(x+y)\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)-xy\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right)$，

若 $(x+y)\mid x^n+y^n$，则 $(x+y)\mid x^{n-2}+y^{n-2}$，依次类推，则可得到 $(x+y)\mid x^2+y^2$，

这与 $(x+y)\nmid x^2+y^2$ 矛盾，

因此可以递推证明当 n 为偶数时，$(x+y)\nmid x^n+y^n$，故选项 C 错误，选项 D 正确.

故选：AD.

20.（2020·北京·高三校考强基计划）设 $\triangle ABC$ 的三边长 a，b，c 都是整数，面积是有理数，则 a 的值可以为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】CD

【分析】由特例可得 a 的值可以取 3，4，再利用整数的性质可判断 a 的值不可能为 1，2，故可得正确的选项.

【详解】取三边为 3，4，5 的三角形，其面积为 6，此时 a 的值可以取 3，4.

当 $a=1$ 时，有 $|a-b|<c<|a+b| \Rightarrow c=b$，

此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}\sqrt{4b^2-1}$，注意到 $4b^2-1\equiv 3(\bmod 4)$，不为完全平方数，

因此 $\triangle ABC$ 的面积不可能是有理数.

当 $a=2$ 时，不妨设 $2\le b\le c$，有 $|a-b|<c<|a+b| \Rightarrow c=b$ 或 $c=b+1$.

情形一　若 $c=b$，则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{b^2-1}$.

若 $\sqrt{b^2-1}=\frac{p}{q}$，其中 p，q 为互质的正整数，则 $q^2\left(b^2-1\right)=p^2$，

于是 b^2-1 为完全平方数，而正整数的完全平方数的最小间隔为 $2^2-1^2=3$，因此该情形不成立.

情形二　若 $c=b+1$，则 $\cos C=\frac{b^2+2^2-(b+1)^2}{4b}=\frac{-2b+3}{4b}$，

于是面积为有理数，等价于 $\sin C$ 为有理数，即 $\sqrt{(4b)^2-(-2b+3)^2}=\sqrt{12b^2+12b-9}$ 为完全平方数，注意到 $12b^2+12b-9\equiv 3(\bmod 4)$，因此 $\triangle ABC$ 的面积不可能是有理数.

综上所述，a 的值不可能为 1，2，可能为 3，4.

故选：CD.

21.（2020·北京·高三校考强基计划）设 x，y 为不同的正整数，则下列结论中正确的有（　）

A．y^2+2x 与 x^2+2y 不可能同时为完全平方数

B．y^2+4x 与 x^2+4y 不可能同时为完全平方数

C．y^2+6x 与 x^2+6y 不可能同时为完全平方数

D．以上答案都不正确

【答案】AB

【分析】利用不等式放缩可得 x^2+2y 不可能是完全平方数且 x^2+4y 只可能是 $(x+1)^2$；x^2+6y 可能是 $(x+1)^2$ 或者 $(x+2)^2$，分类讨论后可得正确选项.

【详解】不妨设 $x\ge y$，则

$x^2<x^2+2y\le x^2+2x<(x+1)^2$，

$x^2<x^2+4y\le x^2+4x<(x+2)^2$，

$x^2<x^2+6y\le x^2+6x<(x+3)^2$，

于是 x^2+2y 不可能是完全平方数；

而 x^2+4y 只可能是 $(x+1)^2$； x^2+6y 可能是 $(x+1)^2$ 或者 $(x+2)^2$．

若 $x^2+4y=(x+1)^2$， 则 $4y=2x+1$， 矛盾；

若 $x^2+6y=(x+1)^2$， 则 $6y=2x+1$， 矛盾；

若 $x^2+6y=(x+2)^2$， 则 $3y=2x+2$， 于是 $(x,y)=(3t-1,2t)\left(t\in\mathbf{N}^*\right)$，

此时 $\begin{cases}y^2+6x=4t^2+18t-6,\\x^2+6y=(3t+1)^2,\end{cases}$

考虑到 $(2t+2)^2\le 4t^2+18t-6<(2t+5)^2$，

于是 $4t^2+18t-6=(2t+2)^2$ 或 $4t^2+18t-6=(2t+4)^2$，

解得 $t=1$ （舍去）或 $t=11$．

因此当 $(x,y)=(32,22)$ 时， $y^2+6x=676=26^2,x^2+6y=1156=34^2$ 同时为完全平方数．

综上所述，选项 AB 正确．

故选：AB.

三、填空题

22．（2018·江西·高三竞赛） a 、 b 为正整数，满足 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$，则所有正整数对 (a,b) 的个数为______.

【答案】4

【详解】由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$， 知 $1\le a<2018$， 且 $ab+2018a-2018b=0$，

于是 $(2018-a)(2018+b)=2018^2=2^2\cdot1009^2$，

而 $0<2018-a<2018$， $2018+b>2018$．

因 1009 为质数，数 $2^2\cdot1009^2$ 所有可能的分解式为

1×2018^2， $2\times\left(2\times1009^2\right)$， 4×1009^2， $1009\times(4\times1009)$．

其中每一个分解式对应于(a,b)的一个解，故其解的个数为4.

故答案为4

23．（2018·全国·高三竞赛）设n为正整数．从集合$\{1,2,\cdots,2015\}$中任取一个正整数n恰为方程$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]$的解的概率为_______（$[x]$表示不超过实数x的最大整数）．

【答案】$\frac{1007}{2015}$

【详解】当$n=6k\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k}{2}\right]=3k$，$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k}{3}\right]+\left[\frac{6k}{6}\right]=2k+k=3k$．

满足题中方程的n为6，12，…，2010，共335个；

当$n=6k-5\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k-5}{2}\right]=3k-3$，

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k-5}{3}\right]+\left[\frac{6k-5}{6}\right]=2k-2+k-1=3k-3$．

满足题中方程的n为1，7，13，…，2011，共336个；

当$n=6k-4\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k-4}{2}\right]=3k-2$，

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k-4}{3}\right]+\left[\frac{6k-4}{6}\right]=2k-2+k-1=3k-3$．

满足题中方程的n不存在；

当$n=6k-3\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k-3}{2}\right]=3k-2$，

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k-3}{3}\right]+\left[\frac{6k-3}{6}\right]=2k-1+k-1=3k-2$．

满足题中方程的n为3，9，15，…，2013，共336个；

当$n=6k-2\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k-2}{2}\right]=3k-1$，

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k-2}{3}\right]+\left[\frac{6k-2}{6}\right]=2k-1+k-1=3k-2$．

满足题中方程的n不存在；

当$n=6k-1\left(k\in Z_{+}\right)$时，$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{6k-1}{2}\right]=3k-1$，

$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=\left[\frac{6k-1}{3}\right]+\left[\frac{6k-1}{6}\right]=2k-1+k-1=3k-2$．

满足题中方程的n不存在.

因此，从集合$\{1,2,\cdots,2015\}$中任取一个正整数n恰为题中方程的解的概率为

$\frac{335+336+336}{2015}=\frac{1007}{2015}$．

24．（2018·安徽·高三竞赛）设n是正整数，且满足$n^5=438427732293$，则

n=___________.

【答案】213

【详解】由 $n^5 \lesssim 44\times 10^{10}$，得 $200<n<300$.设 $n=200(1+x)$.

由 $(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \lesssim \frac{44}{32}$=1.375，得 $x \lesssim$0.075，$n \lesssim$215.

再由 $n^5\equiv n(\bmod 10)$，得 n=213.（注："$\lesssim$"表示"小于约等于".）

故答案为 213

25.（**2018·全国·高三竞赛**）用 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.则 $\left[\frac{1}{\sin^2\frac{1}{\sqrt{2014}}}\right]=$ __________.

【答案】2014

【详解】因为 $0<\frac{1}{\sqrt{2014}}<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\sin\frac{1}{\sqrt{2014}}<\frac{1}{\sqrt{2014}}<\tan\frac{1}{\sqrt{2014}}$

则 $\frac{1}{\sin^2\frac{1}{\sqrt{2014}}}>2014$.

又 $\frac{1}{\sin^2\frac{1}{\sqrt{2014}}}=1+\frac{1}{\tan^2\frac{1}{\sqrt{2014}}}<1+2014=2015$.

故 $\left[\frac{1}{\sin^2\frac{1}{\sqrt{2014}}}\right]=2014$.

26.（**2018·山东·高三竞赛**）已知 a，$b\in\mathbf{Z}$，且 $a+b$ 为方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根，则 b 的最大可能值为______.

【答案】9

【详解】由题设 $(a+b)^2+a(a+b)+b=0$，则 $2a^2+3ab+b^2+b=0$.

因为 a，$b\in Z$，则 $\Delta=9b^2-8(b^2+b)=b^2-8b$ 必为完全平方数.

设 $b^2-8b=m^2(m\in N)$，则 $(b-4)^2-m^2=16$，$(b-4+m)(b-4-m)=16$.

所以 $\begin{cases}b-4+m=8\\b-4-m=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b-4+m=4\\b-4-m=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b-4+m=-2\\b-4-m=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b-4+m=-4\\b-4-m=-4\end{cases}$.

解得 $b=9$，8，-1,0．所以 b 的最大可能值为 9.

27.（**2021·全国·高三竞赛**）$\{a_n\}$ 为正整数列，满足 $a_1=2, a_{n+1}$ 为 $a_n^2-13a_n+133$ 的最小素因子，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，构成集合 A，P 为所有质数构成的集合，则集合 $\complement_P A$ 的最小元素为____________.

【答案】5

【详解】由于 $a_1=2,a_2=3$，故 $2,3\in A$，所以集合 $P-A$ 的最小元素 ≥ 5.

假设存在正整数 n，使得 $a_n=5(n\geq 3)$，则 $5\left|a_{n-1}^2-13a_{n-1}+133\right.$，

故 $5\left|\left(a_{n-1}+1\right)^2+2\right.$，这不可能，因为 $\left(a_n+1\right)^2+2$ 除以 5 的余数为 $1,3$，

所以 $5\in P-A$. 集合 $P-A$ 的最小元素为 5.

故答案为：5.

28.（2021·全国·高三竞赛）集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}_+\left|x\text{ 整除 }\sum_{24}^{i=1}\left[\sqrt{i}\right]\right.\right\}$ 中元素的个数为

__________.

【答案】8

【分析】根据 $\left[\sqrt{i}\right]$ 为 $\sqrt{i}$ 取整数，求和后分解因数可得结果.

【详解】解：由题意得：

$\sum_{i=1}^{24}\left[\sqrt{i}\right]=1\times 3+2\times 5+3\times 7+4\times 9=70=2\times 5\times 7$.

故集合中有 1,2,5,7,10,14,35,70 一共 8 个元素.

故答案为：8

29.（2020·北京·高三强基计划）已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，记 $\{x\}=x-[x]$，则方程 $\{x\}=\left\{\frac{2020}{x}\right\}$ 的整数解个数为__________.

【答案】24

【分析】根据 $\{x\}$ 的定义可得 $x-\frac{2000}{x}$ 为整数，从而可求原方程整数解的个数.

【详解】根据题意，有 $\{x\}=\left\{\frac{2020}{x}\right\}\Rightarrow x-\frac{2020}{x}\in\mathbf{Z}$，

因此 x 是 $2020=2^2\times 5\times 101$ 的约数，个数为 $2\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=24$.

故答案为：24.

30.（2021·北京·高三强基计划）若 $\frac{100!}{12^{50}}$ 可化简为最简分数 $\frac{m}{n}$，则 $n=$__________.

【答案】72

【分析】计算出 $100!$ 中因数 2 和 3 的次数后可求 n 的值.

【详解】关键是计算出 $100!$ 中因数 2 和 3 的次数，分别为

$\sum_{k\in\mathbf{N}^*}\left[\frac{100}{2^k}\right]=50+25+12+6+3+1=97$ 和 $\sum_{k\in\mathbf{N}^*}\left[\frac{100}{3^k}\right]=33+11+3+1=48$，而 $12^{50}=2^{100}\times 3^{50}$，

于是 $n=2^3\times 3^2=72$.

故答案为：72.

31．（2021·北京·高三强基计划）若正整数 m，n 满足 $m^3+n^3+99mn=33^3$，则 (m,n) 有_________组．

【答案】32

【分析】利用因式分解可求不定方程的正整数解.

【详解】注意到 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，

故当 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ 时，

有 $a+b+c=0$ 或 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$ 即 $a=b=c$，

而根据题意，有 $m^3+n^3+(-33)^3=3\cdot m\cdot n\cdot(-33)$，

即 $m^3+n^3+(-33)^3-3\cdot m\cdot n\cdot(-33)=0$，

故 $m^3+n^3+(-33)^3-3\cdot m\cdot n\cdot(-33)=0$

于是 $m+n-33=0$ 或 $m=n=-33$ （舍），

进而可得 $(m,n)=(t,33-t)(t=1,2,\cdots,32)$ 共有 32 组．

故答案为：32

32．（2021·北京·高三强基计划）若存在正整数 n，使得 $3^m\mid(1!+2!+\cdots+n!)$，则正整数 m 的最大值是_________.

【答案】4

【分析】利用归纳法可求正整数 m 的最大值.

【详解】设 $f(n)=1!+2!+\cdots+n!$，则

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)(\bmod 3)$	1	0	0	…								
$f(n)(\bmod 3^2)$	1	3	0	6	0	0	…					
$f(n)(\bmod 3^3)$	1	3	9	6	18	9	0	9	9	…		
$f(n)(\bmod 3^4)$	1	3	9	33	72	63	0	63	…			
$f(n)(\bmod 3^5)$	1	3	9	33	153	144	81	63	144	225	144	…

而当 $n\ge12$ 时，$3^5\mid n!$，所以 $f(n)$ 模 3^5 的余数在 $n\ge12$ 时均为 144.

因此正整数 m 的最大值为 4（此时对应的 n 为 7）.

故答案为：4.

33．（2021·北京·高三强基计划）已知 $f(x)=[x]+[2x]+[3x],[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $f(x)$ 的值域为__________.

【答案】$\bigcup\limits_{k\in z}\{6k,6k+1,6k+2,6k+3\}$

【分析】先判断函数的周期为 1，再就 $f(x)$ 在 $x\in[0,1)$ 上的 6 种情形分类讨论后可求函数的值域.

【详解】注意到 $f(x+1)=f(x)+6$，因此只需要考虑 $f(x)$ 在 $x\in[0,1)$ 上的情形，有

x	$\left[0,\frac{1}{6}\right)$	$\left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right)$	$\left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right)$	$\left[\frac{3}{6},\frac{4}{6}\right)$	$\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right)$	$\left[\frac{5}{6},1\right)$
$[x]$	0	0	0	0	0	0
$[2x]$	0	0	0	1	1	1
$[3x]$	0	0	1	1	2	2
$f(x)$	0	0	1	2	3	3

因此 $f(x)$ 的值域为 $\bigcup\limits_{k\in z}\{6k,6k+1,6k+2,6k+3\}$.

故答案为：$\bigcup\limits_{k\in z}\{6k,6k+1,6k+2,6k+3\}$.

34．（2020·北京·高三强基计划）已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[\pi]=3,[-\pi]=-4$ 等，则 $\left[\frac{2^0}{3}\right]+\left[\frac{2^1}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2020}}{3}\right]=$__________.

【答案】$\frac{2^{2021}-3032}{3}$

【分析】根据 $2^n\equiv(-1)^n(\bmod 3)$ 可求 $\left[\frac{2^n}{3}\right]$ 的形式，再利用分组求和可求数列的和.

【详解】由于 $2^n\equiv(-1)^n(\bmod 3)$，于是 $\left[\frac{2^n}{3}\right]=\begin{cases}\frac{2^n-1}{3},n\text{是偶数},\\ \frac{2^n-2}{3},n\text{是奇数},\end{cases}$

设原式为 M，则 $M=\frac{\left(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2020}\right)-1-2-1-2-\cdots-1}{3}=\frac{2^{2021}-3032}{3}$.