

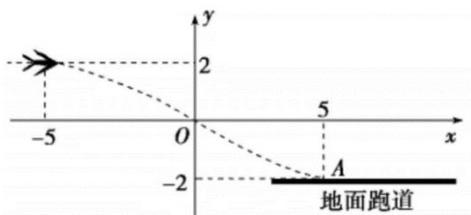
上海市浦东新区建平中学 2024 届高三上学期 11 月质量检

测数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、填空题

1. 已知全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = (0, +\infty)$, 则 $\bar{A} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 半径为 3 的球的体积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 则向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的数量投影为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若 x_1 和 x_2 是函数 $y = \cos 2x$ 互异的两个零点, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设 \bar{z} 为复数 z 的共轭复数, 若复数 z 满足 $z^2 + z + 3 = 0$, 则 $z + \bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知方程 $2|x| + 3|y| = 6$ 的曲线是一个菱形, 以此菱形的四个顶点为顶点的椭圆方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 已知正四棱柱的侧棱长为 2, 体积为 6, 则该正四棱柱的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. 关于 x 的不等式 $x \lg|x| > 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 已知 α, β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 如图所示, 某飞行器在 4 千米高空水平飞行, 从距着陆点 A 的水平距离 10 千米处下降, 已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分, 则此函数的解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



12. 在空间直角坐标系中, 定义点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 两点之间的“直角距

离” $d_{(A,B)} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$. 若 A 和 B 两点之间的距离是 $\sqrt{3}$, 则 A 和 B 两点之间的“直角距离”的取值范围是_____.

二、单选题

13. 已知集合 $A = \left\{ x \mid x = \frac{m\pi}{2}, m \in \mathbf{Z} \right\}$, 集合 $B = \left\{ x \mid x = \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. \emptyset B. A C. B D.

$$\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

14. 设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 “ $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ ” 是 “ $\vec{a} // \vec{b}$ ” 的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充分必要条件
D. 非充分非必要条件

15. 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\{S_n\}$ 为严格增数列, 则数列 $\{a_n\}$ ()

- A. 所有项都大于 0 B. 至多有一项不大于 0
C. 可以有不止一项的有限项不大于 0 D. 可以有无穷多项不大于 0

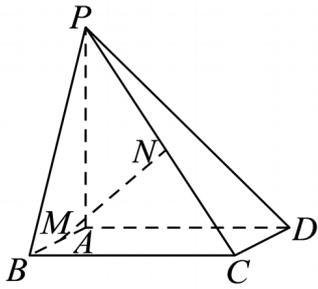
16. 若空间中 $n (n \geq 3)$ 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的最大值为 ()

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

三、解答题

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=1$,

$$AP = AD = 2.$$



(1)若点 M , N 分别为 AB , PC 的中点, 求证: 直线 $MN \parallel$ 平面 PAD ;

(2)求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

18. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列 $a_1=2$, $a_3=a_2+4$.

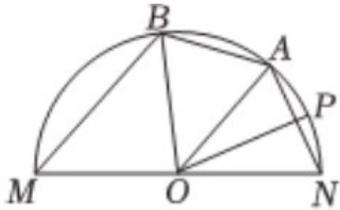
(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. 某中学为美化校园将一个半圆形边角地改造为花园. 如图所示, O 为圆心, 半径

为 1 千米，点 A 、 B 、 P 都在半圆弧上，设 $\angle NOP = \angle POA = \theta$ ， $\angle AOB = 2\theta$ ，其中

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$



(1)若在花园内铺设一条参观的线路，由线段 NA 、 AB 、 BM 三部分组成，求当 θ 取何

值时，参观的线路最长；

(2)若在花园内的扇形 ONP 和四边形 $OMBA$ 内种满杜鹃花，求当 θ 取何值时，杜鹃花的

种植总面积最大.

20. 已知 A, B 分别是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右顶点，过点 $P(0, -3)$ 、斜率为 k 的直线

l 交椭圆 Γ 于 M 、 N 两个不同的点.

(1)求椭圆 Γ 的焦距和离心率；

(2)若点 B 落在以线段 MN 为直径的圆的外部，求 k 的取值范围；

(3)若 $k > 0$ ，设直线 AM 、 AN 分别交 y 轴于点 S 、 T ， $\overrightarrow{PS} = \lambda \overrightarrow{OP}$ ， $\overrightarrow{PT} = \mu \overrightarrow{OP}$ ，求 $\lambda + \mu$ 的取值范围.

21. 若存在 $x_0 \in D$ 使得 $f(x) \leq f(x_0)$ 对任意 $x \in D$ 恒成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 在 D 上

的最大值点，记函数 $f(x)$ 在 D 上的所有最大值点所构成的集合为 M

(1)若 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ ， $D = \mathbf{R}$ ，求集合 M ；

(2)若 $f(x) = \frac{(2^x - x)x}{4^x}$ ， $D = \mathbf{R}$ ，求集合 M ；

(3)设 a 为大于 1 的常数，若 $f(x) = x + a \sin x$ ， $D = [0, b]$ ，证明，若集合 M 中有且仅有

两个元素，则所有满足条件的 b 从小到大排列构成一个等差数列.

参考答案:

1. $(-\infty, 0]$

【分析】利用补集的定义可求得集合 \bar{A} .

【详解】因为全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = (0, +\infty)$, 则 $\bar{A} = (-\infty, 0]$.

故答案为: $(-\infty, 0]$.

2. 36π

【分析】由球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 代入运算即可.

【详解】解: 因为球的半径为 3, 则球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$,

故答案为 36π .

【点睛】本题考查了球的体积公式, 属基础题.

3. -1

【分析】根据向量投影公式结合向量的坐标运算求解即可.

【详解】由题意可得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + (-2) \times 4 = -5$, $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

所以向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的数量投影为 $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \times \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-5}{5} = -1$.

故答案为: -1 .

4. 2

【详解】试题分析: 由题意得, 双曲线的右焦点 $F(\sqrt{13}, 0)$, 其中一条渐近线的方程为

$$y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 2x - 3y = 0, \text{ 所以焦点到渐近线的距离为 } d = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 2.$$

考点：点到直线的距离公式及双曲线的性质。

$$5. \frac{\pi}{2} / \frac{1}{2}\pi$$

【分析】分析可知， $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$ 为函数 $y = \cos 2x$ 的两个对称中心，可知 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为函数 $y = \cos 2x$ 的最小正周期的一半，结合余弦型函数的周期公式可求得结果。

【详解】由题意可知， $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$ 为函数 $y = \cos 2x$ 的两个对称中心，

则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为函数 $y = \cos 2x$ 的最小正周期的一半，即 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\pi}{2}$ 。

$$6. -1$$

【分析】由题意可知， z 、 \bar{z} 是关于实系数方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 的两个虚根，利用韦达定理可

求得 $\frac{z}{z + \bar{z}}$ 的值。

【详解】对于方程 $x^2 + x + 3 = 0$ ， $\Delta = 1 - 4 \times 3 < 0$ ，

由题意可知， z 、 \bar{z} 是关于实系数方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 的两个虚根，

由韦达定理可得 $z + \bar{z} = -1$ 。

故答案为： -1 。

$$7. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

【分析】作出方程 $2|x|+3|y|=6$ 所表示的菱形，求出菱形四个顶点的坐标，设所求椭圆的方

程为 $mx^2+ny^2=1$ ，求出 m 、 n 的值，即可得出所求椭圆的方程.

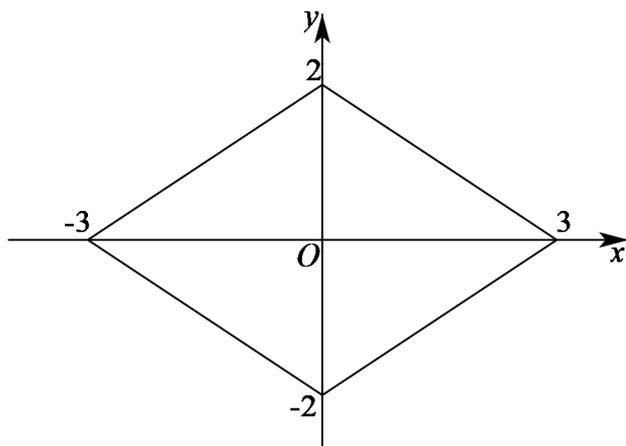
【详解】当 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 时，方程 $2|x|+3|y|=6$ 可化为 $2x+3y=6$ ；

当 $x \leq 0$ ， $y \geq 0$ 时，方程 $2|x|+3|y|=6$ 可化为 $-2x+3y=6$ ；

当 $x \leq 0$ ， $y \leq 0$ 时，方程 $2|x|+3|y|=6$ 可化为 $-2x-3y=6$ ；

当 $x \geq 0$ ， $y \leq 0$ 时，方程 $2|x|+3|y|=6$ 可化为 $2x-3y=6$.

作出方程 $2|x|+3|y|=6$ 所表示的图形如下图所示：



可知方程 $2|x|+3|y|=6$ 的曲线是一个菱形，

且该菱形的四个顶点坐标分别为 $(3,0)$ 、 $(0,2)$ 、 $(-3,0)$ 、 $(0,-2)$ ，

因为椭圆过该菱形的四个顶点，设椭圆的方程为 $mx^2+ny^2=1$ ，

则 $\begin{cases} 9m=1 \\ 4n=1 \end{cases}$ ，解得 $m=\frac{1}{9}$ ， $n=\frac{1}{4}$ ，因此，所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 。

故答案为： $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 。

8. $6+8\sqrt{3}$

【分析】先求出正四棱柱的底面边长，再根据多面体的表面积公式即可得解.

【详解】设正四棱柱的底面边长为 a ,

则 $2a^2 = 6$, 解得 $a = \sqrt{3}$,

所以该正四棱柱的表面积为 $2 \times (\sqrt{3})^2 + 4 \times 2 \times \sqrt{3} = 6 + 8\sqrt{3}$.

故答案为: $6+8\sqrt{3}$.

9. $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

【分析】分 $x > 0$ 、 $x < 0$ 两种情况解不等式 $x \lg|x| > 0$, 结合对数函数的单调性可得出原不等式的解集.

【详解】由 $|x| > 0$ 可得 $x \neq 0$.

当 $x > 0$ 时, 由 $x \lg|x| = x \lg x > 0$ 可得 $\lg x > 0$, 解得 $x > 1$;

当 $x < 0$ 时, 由 $x \lg|x| = x \lg(-x) > 0$ 可得 $\lg(-x) < 0$, 可得 $0 < -x < 1$, 解得 $-1 < x < 0$.

综上所述, 不等式 $x \lg|x| > 0$ 的解集为 $(-1,0) \cup (1,+\infty)$.

故答案为: $(-1,0) \cup (1,+\infty)$.

10. 1

【分析】利用两角和的余弦公式和两角差的正弦公式化简等式, 最后利用同角的三角函数

关系式中的商关系求出 $\tan \alpha$ 的值.

【详解】因为 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$,

所以 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$,

所以 $\cos \alpha (\sin \beta + \cos \beta) = \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta)$.

因为 α, β 均为锐角, 所以 $\sin \beta + \cos \beta \neq 0$,

所以 $\cos \alpha = \sin \alpha$, 所以 $\tan \alpha = 1$.

【点睛】本题考查了两角和的余弦公式和两角差的正弦公式, 考查了同角三角函数关系式中的商关系.

$$11. y = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{5}x$$

【分析】设所求函数解析式为 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 将相应点的坐标代入函数解析式, 可得出 $b = d = 0$, $125a + 5c = -2$, 再利用导数的几何意义可得出 $75a + c = 0$, 可求出 a, c 的值, 由此可得出所求函数的解析式.

【详解】设所求函数解析式为 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 由题意知图象经过点 $(0, 0)$, 故 $d = 0$,

$$\text{即 } y = ax^3 + bx^2 + cx,$$

又因为函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 图象过点 $(-5, 2)$ 和 $(5, -2)$,

$$\text{所以, } \begin{cases} -125a + 25b - 5c = 2 \\ 125a + 25b + 5c = -2 \end{cases}, \text{ 可得 } b = 0, \text{ 则 } 125a + 5c = -2 \quad \textcircled{1},$$

由于该函数图象在点 $(-5, 2)$ 的切线平行于 x 轴, 且 $y' = 3ax^2 + c$,

$$\text{则 } x = -5 \text{ 时, 有 } 75a + c = 0 \quad \textcircled{2}, \text{ 联立 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 可得 } a = \frac{1}{125}, c = -\frac{3}{5},$$

故该三次函数的解析式为 $y = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{5}x$.

故答案为: $y = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{5}x$.

12. $[\sqrt{3}, 3]$

【分析】根据空间两点距离公式, 结合三角代换法、辅助角公式、正弦型函数的最值性质进行求解即可.

【详解】因为 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{3}$,

所以设 $|x_1 - x_2| = \sqrt{3} \cos \theta \sin \varphi$, $|y_1 - y_2| = \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \cos \varphi$,

其中 $\theta, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 因此 $d_{(A,B)} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| = |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{3} \cos \theta \sin \varphi + \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi$$

$$= \sqrt{3} \sin \varphi (\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{3} \cos \varphi = \sqrt{6} \sin \varphi \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \cos \varphi,$$

因为 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 因此 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$,

$$\text{设 } t = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right],$$

$$\text{于是有 } d_{(A,B)} = \sqrt{6} \sin \varphi \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \cos \varphi = \sqrt{6}t \sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi$$

$$= \sqrt{6t^2 + 3} \sin \left(\varphi + \arctan \frac{1}{\sqrt{2}t}\right),$$

因为 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\varphi + \arctan \frac{1}{\sqrt{2}t} \in \left[\arctan \frac{1}{\sqrt{2}t}, \arctan \frac{1}{\sqrt{2}t} + \frac{\pi}{2}\right]$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/388057057103006030>