2024-2025学年北京市朝阳区高三上学期12月月考数学检测试卷

一、单选题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 设集合 $A=\left\{x\middle|x^2<4\right\}$， $B=\left\{x\middle|-1\le x-1\le 1\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|-2<x\le 2\right\}$　　B. $\{x|0\le x<2\}$　　C. $\left\{x\middle|-2<x<2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$

【答案】A

【解析】

【分析】解出集合中的不等式，得到这两个集合，由并集的定义求 $A\cup B$.

【详解】 $A=\left\{x\middle|x^2<4\right\}=\left\{x\middle|-2<x<2\right\}$，又 $B=\left\{x\middle|-1\le x-1\le 1\right\}=\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\middle|-2<x\le 2\right\}$.

故选：A

2. 已知 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$（i 为虚数单位），则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）

A. $-\dfrac{1}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的除法运算求出 z，再求出 $\overline{z}$ 的虚部.

【详解】依题意， $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ 的虚部为 $-\dfrac{1}{5}$.

故选：A

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 经过点 $A(1,0)$， $B(-1,2)$ 且圆心在直线 $2x-y+2=0$ 上，若直线 $x=ay+1$ 被圆 C 截得弦长为 $2\sqrt{3}$，则正实数 a 的值为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由题意可先借助待定系数法计算出圆 C 方程，再借助点到直线的距离公式与垂径定理计算即可得

解.

【详解】设$C\left(m,2m+2\right)$，圆C半径为r，

则有$\begin{cases}\left(1-m\right)^2+\left(2m+2\right)^2=r^2\\\left(-1-m\right)^2+\left(2-2m-2\right)^2=r^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=-1\\r=2\end{cases}$，

即圆C的方程为$\left(x+1\right)^2+y^2=4$，

由直线$x=ay+1$被圆C截得弦长为$2\sqrt{3}$，

则有$d=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\left|-1-1\right|}{\sqrt{a^2+1}}$，即$\sqrt{a^2+1}=2$，解得$a=\pm\sqrt{3}$，

又a为正实数，故$a=\sqrt{3}$.

故选：C.

4. 已知点P是抛物线$y^2=4x$上的一个动点，则点P到点$(0,2\sqrt{2})$的距离与点P到y轴的距离之和的最小值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，将问题转化为点P到点$(0,2\sqrt{2})$的距离与点P到准线距离之和的最小值，再利用抛物线的定义求解即得.

【详解】抛物线$y^2=4x$的焦点$F(1,0)$，准线$l:x=-1$，

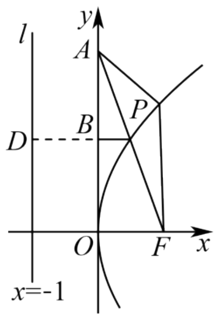
过P作$PD\perp l$于D，交y于点B，则$|PF|=|PD|=|PB|+1$，$|PB|=|PF|-1$，

记点$(0,2\sqrt{2})$为A，于是$|PA|+|PB|=|PA|+|PF|-1\geq|AF|-1=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}-1=2$，

当且仅当P为线段AF与抛物线的交点时取等号，

所以点P到点$(0,2\sqrt{2})$的距离与点P到y轴的距离之和的最小值为2.

故选：2



5. 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用正弦定理的边角变换与余弦定理即可得解.

【详解】因为$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，

所以由正弦定理得$(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即$a^2-c^2=ab-b^2$，

则$a^2+b^2-c^2=ab$，故$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

6. 若$(3-x)(1+2x)^{10}=a_0+a_1x+\ldots+a_{11}x^{11}$，$x\in R$，则$a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}$的值为（　　）

A. 3^9　　B. 3^9-1　　C. 0　　D. -3

【答案】D

【解析】

【分析】应用赋值法可知$S=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}=0$，由二项式展开项的通项公式可求$a_0$，即可求$a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}$的值.

【详解】$x=3$时，由$3-x=0$知：$S=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}=0$，而

$a_0=3\times C_{10}^0\cdot 1^{10}\cdot (2x)^0=3$，

$\therefore a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+a_3\cdot 3^3+\ldots+a_{11}\cdot 3^{11}=-a_0=-3$.

故选：D

7. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$”的（　　）条件.

A. 充分而不必要　　B. 必要而不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

【答案】C

【解析】

【分析】利用充分条件、必要条件的定义，结合数量积的运算律判断即得.

【详解】向量$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{5}$，

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{5}$，因此$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$；

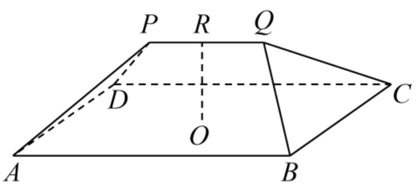
若$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$，则$\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

即$5-4\vec{a}\cdot\vec{b}=5+4\vec{a}\cdot\vec{b}$，整理得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，因此$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“$|\vec{a}-2\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$”的充分必要条件.

故选：C

8. 《九章算术》是中国古代的第一部自成体系的数学专著．其中卷五记载：“今有刍甍，下广三丈，表四丈，上袤二丈，无广，高一丈．问积几何？”问题即为：今有如图所示的屋脊状楔体$PQ-ABCD$，下底面$ABCD$是矩形，假设屋脊没有歪斜，即PQ中点R在底面$ABCD$上的投影为矩形$ABCD$的中心O，$PQ//AB$，AB=4，AD=3，PQ=2，OR=1(长度单位：丈)．则楔体$PQ-ABCD$的体积为(体积单位：立方丈)（　　）



A. 10　　B. 8　　C. 6　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，把楔体$PQ-ABCD$分成一个三棱柱和两个四棱锥，即可求解.

【详解】根据题意，分别过点P，Q作平面$ABCD$的垂直平面，则可以把楔体$PQ-ABCD$分成一个三棱柱和两个四棱锥.

三棱柱的体积$V_1=\frac{1}{2}\times3\times1\times2=3$(立方丈)，

四棱锥的体积$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1\times 3}{2}\times 2=1$(立方丈),

故楔体$PQ-ABCD$的体积$V=V_1+2V_2=5$(立方丈).

故选：D.

9. 已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{e}$在同一平面，其中$\vec{e}$是单位向量.$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\left|\vec{b}-2\vec{e}\right|=1$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值是（　　）

A. 2　　　　B. 1　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. $\sqrt{3}-1$

【答案】D

【解析】

【分析】先确定向量$\vec{a},\vec{b}$所表示的点的轨迹，一个为直线，一个为圆，再根据直线与圆的位置关系求最小值.

【详解】以向量$\vec{e}$的起点为原点，以$\vec{e}$为x轴的正方向，建立平面直角坐标系，

则$\vec{e}=(1,0)$，设$\vec{a}=(c,d)$，$\vec{b}=(m,n)$，

则由$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$得$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cos\frac{\pi}{3}$，得$c=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2}$，$d=\pm\sqrt{3}c$，

由$\left|\vec{b}-2\vec{e}\right|=1$得$(m-2)^2+n^2=1$，

所以点(c,d)在直线$y=\pm\sqrt{3}x$上，点(m,n)在圆上$(x-2)^2+y^2=1$，

又$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(c-m)^2+(d-n)^2}$，

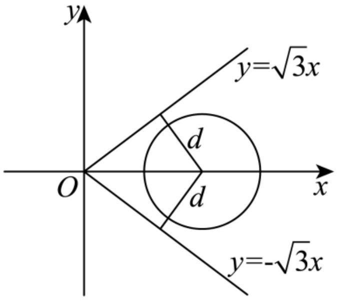
因此，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$等于点$(c,d)$到点$(m,n)$的距离，

圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心到直线$y=\pm\sqrt{3}x$的距离为$d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}>1$，

所以直线$y=\pm\sqrt{3}x$与圆$(x-2)^2+y^2=1$相离，

因此$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值为圆心(2,0)到直线$y=\pm\sqrt{3}$的距离$\frac{\left|\pm 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{3}$减去半径 1，

即为$\sqrt{3}-1$.



故选：D.

【点睛】方法点睛：以向量为载体求相关变量的取值范围，是向量与函数、不等式、三角函数、曲线方程等相结合的一类综合问题.通过向量的坐标运算，将问题转化为解方程、解不等式、求函数值域或直线与曲线的位置关系，是解决这类问题的一般方法.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}+m$ 与函数 $g\left(x\right)=-\ln\frac{1}{x}-3x\left(x\in\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$ 的图象上至少存在一对关于 x 轴对称的点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{5}{4}+\ln 2,2\right]$　　B. $\left[2-\ln 2,\frac{5}{4}+\ln 2\right]$　　C. $\left[\frac{5}{4}+\ln 2,2+\ln 2\right]$　　D. $\left[2-\ln 2,2\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^{2}+\ln x-3x+m$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 有零点，利用导数研究函数的性质进而可得 $m-2\le 0\le m+\ln 2-2$，即得.

【详解】原问题等价于 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^{2}+\ln x-3x+m$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 有零点，

而 $h'\left(x\right)=2x+\frac{1}{x}-3=\frac{1}{x}\left(2x-1\right)\left(x-1\right)$，

$\therefore x\in\left(\frac{1}{2},1\right),h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减，　$x\in\left(1,2\right],h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 单调递增，

又 $h\left(1\right)=m-2,h\left(2\right)=\ln 2-2+m,h\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{5}{4}+m$，

由 $\ln 2>\frac{1}{2}$ 可判断 $h\left(2\right)>h\left(\frac{1}{2}\right)$，

因而 $h\left(x\right)$ 的值域为 $\left[m-2,m+\ln 2-2\right]$，

又$h\left(x\right)$有零点，有$m-2\le 0\le m+\ln 2-2$，

所以$m\in\left[2-\ln 2,2\right]$.

故选：D.

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

11. 已知双曲线$y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则双曲线的离心率$e$=______.

【答案】2

【解析】

【分析】根据渐近线方程求出m，进而求出a^2,b^2，可求得离心率.

【详解】对于双曲线$y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$，标准方程为$y^2-\dfrac{x^2}{-m}=1$，则$a=1$，$b=\sqrt{-m}$，

又双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，所以$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{-m}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得$m=-3$，

则$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$\therefore e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+3}=2$.

故答案为：2.

12. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，公差d不为0，$a_1=9$，且a_1,a_4,a_5成等比数列，则$d=$__________；当$n=$__________时，数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n有最大值.

【答案】　①. -2　②. 5

【解析】

【分析】根据等比数列得到${a_4}^2=a_1a_5$，解得$d=-2$，再计算$a_5=1>0$，$a_6=-1<0$，得到答案.

【详解】a_1,a_4,a_5成等比数列，故$a_4^2=a_1a_5$，即$\left(9+3d\right)^2=9\times\left(9+4d\right)$，

解得$d=-2$或$d=0$（舍）.

$a_n=9-2\left(n-1\right)=11-2n$，$a_1=9>0,a_5=1>0$，$a_6=-1<0$，

故$n=5$时，S_n有最大值.

故答案为：-2；5

13. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左焦点为$F$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，若线段$PF$的中点在以原点$O$

为圆心，$\left|OF\right|$为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是_______.

【答案】$\sqrt{15}$

【解析】

【分析】结合图形可以发现，利用三角形中位线定理，将线段长度用坐标表示成圆的方程，与椭圆方程联立可进一步求解.利用焦半径及三角形中位线定理，则更为简洁.

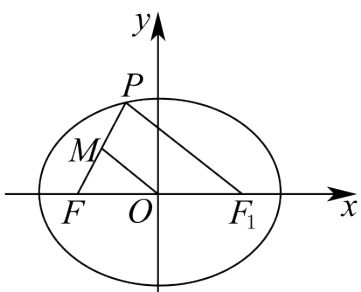
【详解】方法 1：由题意可知$|OF|=|OM|=c=2$，

由中位线定理可得$\left|PF_1\right|=2|OM|=4$，设$P(x,y)$可得$(x-2)^2+y^2=16$，

联立方程$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

可解得$x=-\dfrac{3}{2},x=\dfrac{21}{2}$（舍），点$P$在椭圆上且在$x$轴的上方，

求得$P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，所以$k_{PF}=\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$



方法 2：焦半径公式应用

解析 1：由题意可知$|OF|=|OM|=c=2$，

由中位线定理可得$\left|PF_1\right|=2|OM|=4$，即$a-ex_p=4\Rightarrow x_p=-\dfrac{3}{2}$

求得$P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，所以$k_{PF}=\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$.

【点睛】本题主要考查椭圆的标准方程、椭圆的几何性质、直线与圆的位置关系，利用数形结合思想，是解答解析几何问题的重要途径.

14. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-a+1\right)\left(x+1\right), & x<1,\\ \lg x-a & x\geq 1.\end{cases}$

①当 $a=0$ 时，$f(f(10))=$________；

②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则 a 的取值范围是________.

【答案】　①. 0　②. $\left(-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

【解析】

【分析】①根据函数解析式求得 $f(f(10))$.②对 a 进行分类讨论，根据 $f\left(x\right)$ 零点的个数求得 a 的取值范围.

【详解】①，$a=0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x+1\right)^2, x<1\\ \lg x, x\geq 1\end{cases}$，

所以 $f\left(10\right)=\lg 10=1$，

所以 $f(f(10))=f\left(1\right)=\lg 1=0$.

②，令 $f(x)=0$，可得:

当 $x<1$ 时，$\left(x-a+1\right)\left(x+1\right)=0$，

所以 $x=-1$ 或 $x=a-1$，

当 $a=0$ 或 $a\geq 2$ 时，方程 $\left(x-a+1\right)\left(x+1\right)=0$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上有唯一解 $x=-1$，

当 $a<0$ 或 $0<a<2$ 时，方程 $\left(x-a+1\right)\left(x+1\right)=0$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上的解为 $x=-1$ 或 $x=a-1$，

当 $x\geq 1$ 时，$\lg x-a=0$，

所以当 $a\geq 0$ 时，$x=10^a$，

当 $a<0$ 时，方程 $\lg x-a=0$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上无解，

综上，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1,a-1$，

当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1,1$，

当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点 $-1,a-1,10^a$，

当 $a\geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $-1,10^a$，

因为 $f(x)$ 恰有 2 个零点，所以 $a\geq 2$ 或 $a\leq 0$，

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

故答案为：0；$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

15. 对于数列$\{a_n\}$，若存在$M>0$，使得对任意$n\in \mathrm{N}^*$，有$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<M$，则称$\{a_n\}$为“有界变差数列”.给出以下四个结论：

①若等差数列$\{a_n\}$为“有界变差数列”，则$\{a_n\}$的公差d等于0；

②若各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$为“有界变差数列”，则其公比q的取值范围是$(0,1)$；

③若数列$\{a_n\}$是“有界变差数列”，则存在$T>0$，使得对任意$n\in \mathrm{N}^*$，有$-T<a_n<T$；

④若数列$\{a_n\}$是“有界变差数列”，则数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$必是“有界变差数列”.

其中所有正确结论的序号是______.

【答案】①③④

【解析】

【分析】对①：借助等差数列性质可得$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=n|d|$，结合定义，分$d=0$及$d\neq 0$讨论即可得；对②：借助等比数列性质可得$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=(a_1+a_2+\cdots a_n)\cdot|q-1|$，结合定义，分$q=1$及$q\neq 1$进行讨论，当$q\neq 1$时，结合等比数列求和公式分$0<q<1$及$q>1$讨论即可得；对③：借助绝对值不等式放缩可得$|a_{n+1}|-|a_1|<M$，即可得存在$T\geq M+|a_1|$满足题意；对④：结合③中所得，结合合理放缩可得$\left|\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}\right|<\dfrac{|a_{n+1}-a_n|}{4}+\dfrac{|T|}{2^{n+1}}$，再结合等比数列求和公式计算即可得$\left|\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_1}{2^1}\right|+\left|\dfrac{a_3}{2^3}-\dfrac{a_2}{2^2}\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}\right|<\dfrac{M}{4}+\dfrac{T}{2}$.

【详解】对①：由等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则有$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=n|d|$，

若$d\neq 0$，则对任意的$M>0$，总存在$n\geq\dfrac{M}{|d|}$，使得$n|d|\geq M$，与题意不符，

若$d=0$，则$n|d|=0<M$对任意的$M>0$恒成立，符合要求；

综上所述，$\{a_n\}$的公差d等于0，故①正确；

对②：由等比数列$\{a_n\}$的公比为q，且各项均为正数，故$a_1>0$，$q>0$，

则$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=\left(a_1+a_2+\cdots a_n\right)\cdot\left|q-1\right|$，

若$q=1$，则$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=0$，

此时对任意的$M>0$，有$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=0<M$恒成立，符合要求；

若$q\neq 1$，则$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\cdot\left|q-1\right|$，

若$0<q<1$，则$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\cdot\left|q-1\right|=a_1\left(1-q^n\right)<a_1$，

故对任意的$M\geq a_1$，有$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|<M$恒成立，符合要求；

若$q>1$，则$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\cdot\left|q-1\right|=a_1\left(q^n-1\right)$，

当$n\to+\infty$时，$a_1\left(q^n-1\right)\to+\infty$，故不存在符合条件的$M$；

综上所述，$q\in\left(0,1\right]$，故②错误；

对③：由题意可得对任意$n\in\mathrm{N}^*$，有$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|<M$，

又$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|\geq\left|\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_2\right)+\cdots\left(a_{n+1}-a_n\right)\right|=\left|a_{n+1}-a_1\right|$，

故$\left|a_{n+1}-a_1\right|<M$，又$\left|a_{n+1}-a_1\right|\geq\left|a_{n+1}\right|-\left|a_1\right|$，故$\left|a_{n+1}\right|-\left|a_1\right|<M$，

即$\left|a_{n+1}\right|<M+\left|a_1\right|$，即有$\left|a_n\right|<M+\left|a_1\right|$，

则总存在$T\geq M+\left|a_1\right|$，使得对任意$n\in\mathrm{N}^*$，有$-T<a_n<T$，故③正确；

对④：设$\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|<M$，

由③知：对任意$n\in\mathrm{N}^*$，总存在$T\geq M+\left|a_1\right|$，使$-T<a_n<T$，

则$\left|\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}\right|=\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^{n+1}}\right|\leq\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{2^{n+1}}\right|+\left|\dfrac{a_n}{2^{n+1}}\right|<\dfrac{\left|a_{n+1}-a_n\right|}{4}+\dfrac{T}{2^{n+1}}$，

则$\left|\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_1}{2^1}\right|+\left|\dfrac{a_3}{2^3}-\dfrac{a_2}{2^2}\right|+\cdots+\left|\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}\right|$

$<\dfrac{\left|a_2-a_1\right|+\left|a_3-a_2\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|}{4}+T\cdot\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$