原函数与导函数混合构造问题

1.构造函数的依据——导数的运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$;(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$;

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

例如,若条件是$f'(x)\pm g'(x)>0$,则构造函数$F(x)=f(x)\pm g(x)$,有$F'(x)>0$,$F(x)$单调递增;

若条件是$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$,则构造函数$F(x)=f(x)g(x)$,有$F'(x)>0$,$F(x)$单调递增;

若条件是 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$,则构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,有

$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}>0$,$F(x)$单调递增.

2.基本构造类型(指数函数、幂函数、三角函数)

(1)利用e^x进行构造:

对于不等式$f'(x)+f(x)>0$,构造函数$F(x)=e^x f(x)$;

对于不等式$f'(x)-f(x)>0$,构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$.

(2)利用x进行构造:

对于不等式$xf'(x)+f(x)>0$,构造函数$F(x)=xf(x)$;

对于不等式$xf'(x)-f(x)>0$,构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{x}$.

(3)利用$\sin x$,$\cos x$进行构造:

对于不等式$\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x)>0$,构造函数$F(x)=\sin x\cdot f(x)$;

对于不等式$\sin x\cdot f'(x)-\cos x\cdot f(x)>0$,构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$;

对于不等式$\cos x\cdot f'(x)-\sin x\cdot f(x)>0$,构造函数$F(x)=f(x)\cdot \cos x$;

对于不等式$\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)>0$,构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$.

角度一　利用构造的函数的单调性比较大小

例1(1)(2024·贵州贵阳一模)已知定义域为**R**的函数$f(x)$,其导函数为$f'(x)$,且满足$f'(x)-2f(x)<0$,$f(0)=1$,则(　D　)

A.$e^2f(-1)<1$　　B.$f(1)>e^2$

C.$f\left(\frac{1}{2}\right)>e$　　D.$f(1)<ef\left(\frac{1}{2}\right)$

解析 令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)e^{2x}-2f(x)e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$,

因为$f'(x)-2f(x)<0$在**R**上恒成立,

所以$g'(x)<0$在**R**上恒成立,故$g(x)$在**R**上单调递减,所以$g(-1)>g(0)$,即

$\frac{f(-1)}{e^{-2}}=e^2f(-1)>\frac{f(0)}{e^0}=1$,故 A 错误;

易得 $g(1)<g(0)$,即$\frac{f(1)}{e^2}<\frac{f(0)}{e^0}$,即 $f(1)<e^2f(0)=e^2$,故 B 错误;

易得 $g\frac{1}{2}<g(0)$,即$\frac{f\frac{1}{2}}{e^1}<\frac{f(0)}{e^0}=1$,即 $f\frac{1}{2}<e$,故 C 错误;

易得 $g\frac{1}{2}>g(1)$,即$\frac{f\frac{1}{2}}{e^1}>\frac{f(1)}{e^2}$,即 $f(1)<ef\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 D.

角度一 角度二

(2)(2024·浙江杭州一模)已知定义在**R**上的函数$f(x)$满足$\sin xf(x)+\cos xf'(x)>0$,则(B)

A.$f\left(\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$　　B.$f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

C.$f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$　　D.$f\left(\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

解析 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

故 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}>0$ 恒成立,

故 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增,故 $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,

即 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}\Rightarrow\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

角度一 角度二

规律方法

1. 本题(1)实际利用了 e^{nx} 进行构造，对于不等式 $f'(x)+nf(x)>0$，构造函数 $F(x)=e^{nx}f(x)$，对于不等式 $f'(x)-nf(x)>0$，构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^{nx}}$.
2. 与三角函数有关的构造需要正确选择利用正弦函数还是余弦函数.
3. 比较大小时要对所构造的函数合理赋值和变形.

角度二　利用构造的函数的单调性解不等式

例2(1)(2024·江苏常州统考)已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的导数为$f'(x)$,$f(1)=\mathrm{e}$,且对任意的x满足$f'(x)-f(x)<\mathrm{e}^x$,则不等式$f(x)>x\mathrm{e}^x$的解集是(　A　)

A.$(-\infty,1)$　　B.$(-\infty,0)$

C.$(0,+\infty)$　　D.$(1,+\infty)$

解析 令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}-x$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}-1$,因为 $f'(x)-f(x)<e^x$,

所以$\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}-1<0$,即 $g'(x)<0$,

可知 $g(x)$在 **R** 上单调递减,且 $g(1)=\frac{f(1)}{e}-1=0$,由 $f(x)>xe^x$ 可得$\frac{f(x)}{e^x}-x>0$,

即 $g(x)>g(1)$,解得 $x<1$,

所以不等式 $f(x)>xe^x$ 的解集是$(-\infty,1)$.

角度一 角度二

(2)(2024·广州梅州二模)设函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上的导数为$f'(x)$,对任意$x\in\mathbf{R}$,有$f(-x)+f(x)=2x^2$,且当$x\in(0,+\infty)$,$f'(x)<2x$.若$f(3-a)-f(a)\geq 9-6a$,则实数a的取值范围为(A)

A. $\frac{3}{2},+\infty$

B. $-\infty,\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{2},3$

D. $[3,+\infty)$

角度一 角度二