2023-2024学年云南省四校高三高考备考实用性联考卷数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|-4<x<-2\}$，$N=\{x|x^2+5x+6<0\}$，则 $M\cap N=$(　　)

A. $\{x|-4<x<-3\}$　　B. $\{x|-4<x<-2\}$

C. $\{x|-3<x<-2\}$　　D. $\{x|-3<x<2\}$

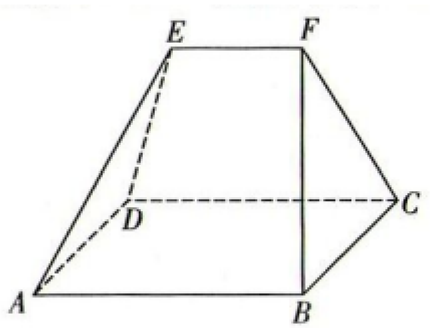
2. 若复数 z 满足 $z(1-i)=3i$，则 z 的虚部为(　　)

A. $\frac{3}{2}i$　　B. $-\frac{3}{2}i$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=27$，$a_{10}=13$，则 $S_{14}=$(　　)

A. 112　　B. -122　　C. 28　　D. 120

4. 拟柱体(所有顶点均在两个平行平面内的多面体)可以用辛普森 $(Simpson)$ 公式 $V=\frac{1}{6}h(S_1+4S_0+S_2)$ 求体积，其中 h 是高，S_1 是上底面面积，S_2 是下底面面积，S_0 是中截面(到上、下底面距离相等的截面)面积.如图所示，在五面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为4的正方形，$EF=2$，且直线 EF 到底面 $ABCD$ 的距离为3，则该五面体的体积为(　　)



A. 18　　B. 20　　C. 24　　D. 28

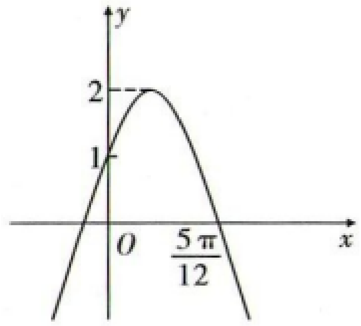
5. 已知 $\frac{\cos 2\theta+1}{1+2\sin 2\theta}=-\frac{2}{3}$，则 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=$(　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3　　C. 1　　D. $\frac{1}{3}$

6. 已知 $A(3,0)$，$B(-3,0)$，P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的任意一点，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值为(　　)

A. 9　　B. 16　　C. 25　　D. 50

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则下列叙述正确的是(　　)



A. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

B. $f(\frac{2\pi}{3}-x)=f(x)$，$x\in R$ 恒成立

C. 对任意 x_1，x_2，$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，$f(x_1)<f(x_2)$，$|b-a|_{\max}=\frac{2}{3}\pi$

D. 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4(x_1<x_2)$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

8. 一枚质地均匀的正方体骰子，其六个面分别刻有 1，2，3，4，5，6 六个数字，投掷这枚骰子两次，*A* 表示事件“第一次向上一面的数字是 1”，*B* 表示事件“第二次向上一面的数字是 2”，*C* 表示事件“两次向上一面的数字之和是 7”，*D* 表示事件“两次向上一面的数字之和是 8”，则(　　)

A. *C* 与 *D* 相互独立　　B. *A* 与 *D* 相互独立　C. *B* 与 *D* 相互独立　D. *A* 与 *C* 相互独立

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 已知一组数据 x_1，x_2，$\cdots$，$x_{15}(x_1<x_2<\cdots<x_{15})$ 的平均数是 3，方差是 2，由这组数据得到另一组新的样本数据 x_1-1，x_2-1，$\cdots$，$x_{15}-1$，则(　　)

A. 两组样本数据的样本平均数相同

B. 两组样本数据的样本方差相同

C. x_1-1，x_2-1，$\cdots$，$x_{15}-1$ 样本数据的第 30 百分位数为 x_5-1

D. 将两组数据合成一个样本容量为 30 的新的样本数据，该样本数据的平均数为 3

10. 已知平面向量 $\overrightarrow{a}=(-1,1)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，则下列说法正确的是(　　)

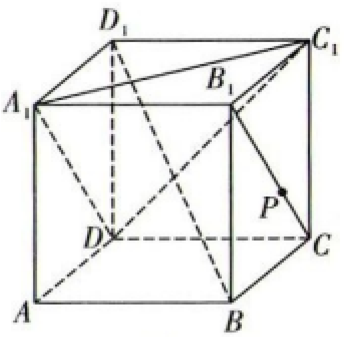
A. $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

B. $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$

C. 与 $\overrightarrow{b}$ 垂直的单位向量的坐标为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

D. 若向量 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与向量 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 共线，则 $\lambda=0$

11. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 *P* 在线段 B_1C 上运动，则下列结论正确的是(　　)



A. 点 *B* 到平面 A_1C_1D 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. 直线 $AP//$ 平面 A_1C_1D

C. 异面直线 *AP* 与 A_1D 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

D. 三棱锥 A_1-PC_1D 的体积为定值

12. 已知圆的圆心在直线 $x=2$ 上，且与 $l:x-\sqrt{3}y+2=0$ 相切于点 $P(1,\sqrt{3})$，过点 $Q(1,0)$ 作圆的两条互相垂直的弦 *AB*，CD. 记线段 *AB*，*CD* 的中点分别为 *M*，*N*，则下列结论正确的是(　　)

A. 圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$　　　　B. 四边形 *ACBD* 面积的最大值为 $\frac{7}{2}$

C. 弦 *AB* 的长度的取值范围为 $[2\sqrt{3},4]$　　　　D. 直线 *MN* 恒过定点 $(\frac{3}{2},0)$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

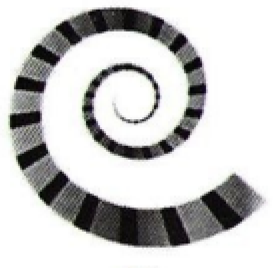
13. 定义在 *R* 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(-x)$，当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=x^2+2x$，则 $f(2021)=$__________.

14. 将函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象绕原点顺时针旋转 45° 得到曲线 *C*，则曲线 *C* 的焦点坐标为__________.

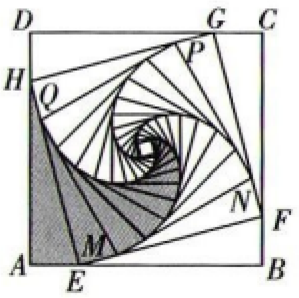
15. 已知函数 $f(x)=\ln(x+m)-e^{x+1}$，满足 $f(x)<0$ 恒成立的最大整数 *m* 的值为__________.

16. 螺旋线这个名词来源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠卷”，平面螺旋便是以一个固定点开始向外逐圈旋绕而形成的曲线，如图甲所示.如图乙所示阴影部分也是一个美丽的螺旋线型的图案，它的画法是这样的：正方形 *ABCD* 的边长为 4，取正方形 *ABCD* 各边的四等分点 *E*，*F*，*G*，*H*，作第 2 个正方形 *EFGH*，然后再取正方形 *EFGH* 各边的四等分点 *M*，*N*，*P*，*Q*，作第 3 个正方形 *MNPQ*，依此方法一直

继续下去，就可以得到阴影部分的图案.设正方形 *ABCD* 的边长为 a_1，后续各正方形的边长依次为 a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$;如图乙阴影部分，直角三角形 *AEH* 的面积为 b_1，后续各直角三角形的面积依次为 b_2，b_3，$\cdots$，b_n，$\cdots$，则 $a_3\cdot b_3=$__________;记数列 $\{b_n\}$ 的前 *n* 项和为 S_n，若对于 $2S_n^2-\lambda S_n+1\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最大值为__________.



甲



乙

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，满足 $\sqrt{3}c=2b\cos(\frac{\pi}{6}-A)$.

(1) 求角 *B* 的大小;

(2) 若 $b=\sqrt{3}$，设 *BD* 是 *AC* 边上的中线，求 *BD* 的最大值.

18.（本小题 12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，且 $n(a_{n+1}-S_n)=2S_n$.

(1) 证明：数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{\frac{4^{n-1}}{a_nS_n}\}$ 的前 *n* 项和 T_n.

19.（本小题 12 分）

昭通苹果种植历史悠久，可追溯到民国十五年(1926 年)，法国人贾海义从欧洲引入，种植于昆明并传入昭通.昭通苹果主要品种有金帅、红富士等，经过驯化的富士系列苹果在昭阳区种植产量高、口味好、耐贮藏、含糖量高、风味佳，有成熟早、甜度好、香味浓、口感脆等特点.昭通苹果开发公司从进入市场的“昭通苹果”中随机抽检 100 个，利用等级分类标准得到数据如下：

等级	*A* 级	*B* 级	*C* 级
个数	50	40	10

(1) 以表中抽检的样本估计全市“昭通苹果”的等级，现从全市上市的“昭通苹果”中随机抽取 10 个，求取到 4 个 *A* 级品的概率;

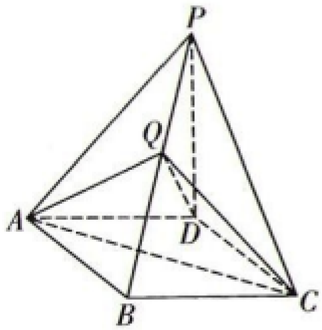
(2) 某超市每天都采购一定量的 A 级“昭通苹果”，超市记录了 20 天“昭通苹果”的实际销量，统计结果如下表：

销量(kg)	150	160	170	180	190	200
天数	2	4	5	6	2	1

今年 A 级“昭通苹果”的采购价为 6 元$/kg$，超市以 10 元$/kg$的价格卖出.为了保证苹果质量，如果当天不能卖完，就以 4 元$/kg$退回供货商.若超市计划一天购进 170kg 或 180kg“昭通苹果”，你认为应该购进 170kg 还是$180kg$? 请说明理由.

20.（本小题 12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$的底面 ABCD 为菱形，$\angle BCD=60^\circ$，$\triangle PAC$为等边三角形，点 Q 为棱 PB 上的动点.



(1) 求证：$AC\perp QD$;

(2) 若$PD\perp$平面 ABCD，问动点 Q 在何处时，使得平面 AQD 与平面 CQD 的夹角的余弦值为$\dfrac{7}{11}$?

21.（本小题 12 分）

已知点 M 在抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上，F 为抛物线 C 的焦点，且$|MF|=4$，$\angle MFO=120^\circ$(O为坐标原点).

(1) 求 p 的值;

(2) 设 A，B，C，D 是抛物线 C 上的四个动点，且$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.记直线 OA，OB，OC，OD 的斜率分别为$k_1$，$k_2$，$k_3$，$k_4$，且$k_1\cdot k_3=k_2\cdot k_4=-4$.求四边形 ABCD 的面积 S 的最小值.

22.（本小题 12 分）

设函数$f(x)=e^{(a-1)x}+x^2-ax+x$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性;

(2) 若对于任意x_1，$x_2\in[-1,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$，求 a 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查交集的求法、一元二次不等式的解法，考查运算求解能力，属于基础题.

由题意分别求出集合 M，N，再求出 $M\cap N$ 即可.

【解答】

解：$\because M=\{x|-4<x<-2\}$， $N=\{x|x^2+5x+6<0\}=\{x|-3<x<-2\}$，

$\therefore M\cap N=\{x|-3<x<-2\}$.

故选 C.

2.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了复数的运算，虚部的定义，属于基础题.

利用复数的运算法则化简得 z，进而得虚部.

【解答】

解：由题意得：

$$z=\frac{3i}{1-i}=\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{-3+3i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i,$$

所以 z 的虚部为$\frac{3}{2}$.

故选 C 项.

3.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查等差数列的前 n 项和公式，涉及等差数列的性质，属于基础题.

根据题意，由 $S_9=\frac{9\times(a_1+a_9)}{2}=9a_5=27$，解可得 $a_5=3$，又由 $S_{14}=\frac{14\times(a_1+a_{14})}{2}=\frac{14\times(a_5+a_{10})}{2}$，计算可得答案.

【解答】

解：根据题意，等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_9=27$，

即 $S_9=\dfrac{9\times(a_1+a_9)}{2}=\ 9a_5=27$，解可得 $a_5=3$，

又由 $a_{10}=13$，则 $S_{14}=\dfrac{14\times(a_1+a_{14})}{2}=\dfrac{14(a_5-4d+a_{10}+4d)}{2}=\dfrac{14\times(a_5+a_{10})}{2}=112$，

故选：A.

4.【答案】*B*

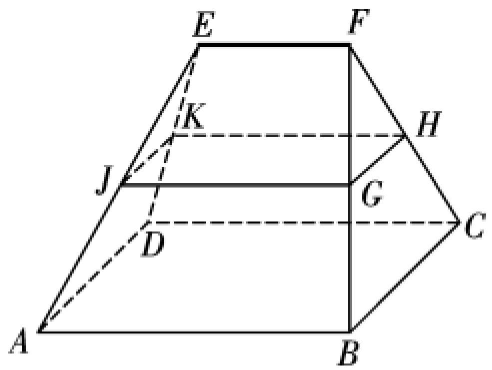
【解析】【分析】

本题考查多面体的结构特征与体积计算，属于基础题.

根据已知条件可判断中截面为矩形，并求其面积，然后利用体积公式计算即可.

【解答】

解：由题意得：$h=3$，$S_1=0$，$S_2=4\times4=16$，如图：



分别取 *BF*，*CF*，*DE*，*AE* 的中点 *G*，*H*，*K*，*J*，顺次连接，得到截面 *GHKJ* 为中截面，且为长方形，边长为 $GJ=KH=\dfrac{2+4}{2}=3$，

$KJ=HG=2$，所以 $S_0=2\times3=6$，

所以 $V=\dfrac{1}{6}h(S_1+4S_0+S_2)$

$=\dfrac{1}{6}\times3\times(0+4\times6+16)=20$，

故选 B.

5.【答案】*A*

【解析】【分析】

本题主要考查三角函数值的计算，熟练掌握二倍角公式和同角三角函数的关系式是解决本题的关键，属于基础题.

根据二倍角公式和同角三角函数的关系式进行运算化简，即可得解.

【解答】

解：$\dfrac{\cos 2\theta+1}{1+2\sin 2\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{2}{\tan^2\theta+4\tan\theta+1}=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\theta+4\tan\theta+4=0.$

$\therefore \tan\theta=-2$

$\therefore \tan(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\dfrac{-2+1}{1-(-2)}=-\dfrac{1}{3}$，

故选 A.

6.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查椭圆的定义，以及由基本不等式求最值或取值范围，属于基础题.

由基本不等式求最值或取值范围以及椭圆的定义即可求解.

【解答】

解：由题意可知 A、B 为椭圆的焦点，

根据椭圆定义可得 $|PA|+|PB|=10$，

又 $\because |PA|+|PB|\geqslant 2\sqrt{|PA|\cdot|PB|}$，

$\therefore 10\geqslant 2\sqrt{|PA|\cdot|PB|}$，即 $|PA|\cdot|PB|\leqslant 25$，

$\therefore$ 当且仅当 $|PA|=|PB|=5$ 时，$|PA|\cdot|PB|$ 的最大值为 25，

故选 C.

7.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了三角函数的图象及性质，求出函数的解析式是关键点，属于中档题.

由图象求得 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，可以判断 A，结合正弦函数的对称性，可以判断 B，利用正弦函数的周期性，可以判断 C，结合正弦函数的零点，可以判断 D.

【解答】

解：由图象可得，函数 $f(x)$ 的最大值为 2，即 $A=2$，

又由 $f(0)=1$，即 $2\sin\varphi=1$，且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

因为$f(\frac{5\pi}{12})=0$且为单调递减时的零点，

所以$\frac{5\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi$， $k\in Z$，

可得$\omega=2+\frac{24k}{5}$， $k\in Z$，

由图象知$T=\frac{2\pi}{\omega}>2\times\frac{5\pi}{12}$，可得$\omega<\frac{12}{5}$，

又由$\omega>0$，所以$\omega=2$，所以$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，所以*A*错；

对于*B*中，令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in Z$，得对称轴为$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$， $k\in Z$，

可知$x=\frac{\pi}{3}$不是$f(x)$的对称轴，则*B*错；

对于*C*中，函数单调递增区间的长度，最大为$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故*C*错；

对于*D*中，由$|f(x)|\leqslant 2$，因为$f(x_1)\cdot f(x_2)=-4(x_1<x_2)$，

所以可得，令$f(x_1)=-2$且$f(x_2)=2$，

设$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，使$|x_0|$最小，即绝对值最小的零点，

令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$， $k\in Z$，可得$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$， $k\in Z$，

由$k=0$时， $|x_0|_{\min}=\frac{\pi}{12}$，

所以$|x_1+x_2|_{\min}=\frac{\pi}{6}$，所以*D*正确.

故选： D.

8.【答案】*D*

【解析】【分析】

本题主要考查的是独立事件的特点，涉及古典概型的概率计算，属于基础题.

利用相互独立事件乘法公式直接求解即可.

【解答】

解： $P(A)=\frac{1}{6}$， $P(B)=\frac{1}{6}$， $P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$， $P(D)=\frac{5}{36}$，

$P(AC)=\frac{1}{36}=P(A)P(C)$，故*A*与*C*相互独立，*D*正确；

$P(AD)=0\neq P(A)P(D)$，故*A*与*D*不相互独立，*B*错误；

$P(BD)=\frac{1}{36}\neq P(B)P(D)$，故 B 与 D 不相互独立，C 错误；

$P(CD)=0\neq P(C)P(D)$，故 C 与 D 不相互独立，A 错误.

故选 D.

9.【答案】BC

【解析】【分析】

本题考查样本数字特征，属于基础题.

利用平均数、百分位数和方差的定义即可判断.

【解答】

解：由题意可得新的样本数据平均数为 2，方差为 2，第 30 百分位数：$15\times 0.3=4.5$，

故为第 5 个数，即 x_5-1，新样本的平均数为 $\frac{2\times 15\overline{x}-15}{30}=2.5$，

故选 BC.

10.【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查平面向量的夹角，投影向量，向量垂直以及向量共线的充要条件，属于中档题.

根据向量夹角公式即可判断 A；根据投影向量的计算公式即可判断 B;设与 $\overrightarrow{b}$ 垂直的单位向量的坐标为 (x_0,y_0)，根据题意列出关系式，解出方程组即可判断 C；根据向量共线的坐标运算求出 λ 的值即可判断 D.

【解答】

解：由题意知 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(-1)\times 3+1\times 4=1$，

则 $\cos<\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}>=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times 5}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，故 A 正确;

$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 方向上的投影向量为 $|\overrightarrow{b}|\cos<\overrightarrow{a}，\overrightarrow{b}>\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=5\times\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$，故 B 正确;

设与 $\overrightarrow{b}$ 垂直的单位向量的坐标 (x_0,y_0)，

则有 $\begin{cases}3x_0+4y_0=0,\\ x_0^2+y_0^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\frac{4}{5},\\ y_0=-\frac{3}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{4}{5},\\ y_0=\frac{3}{5},\end{cases}$

所以与 $\overrightarrow{b}$ 垂直的单位向量的坐标为 $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ 或 $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$，故 C 错误;

显然 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 不共线,

因为 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}=(-1,1)+\lambda(3,4)=(-1+3\lambda,1+4\lambda)$，

$\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}=(-1,1)-\lambda(3,4)=(-1-3\lambda,1-4\lambda)$，

向量 $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ 与向量 $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ 共线，

可得 $(-1+3\lambda)(1-4\lambda)-(-1-3\lambda)(1+4\lambda)=0$，

整理可得 $14\lambda=0$，解得 $\lambda=0$，故 *D* 正确，

故选 ABD.

11.【答案】*ABD*

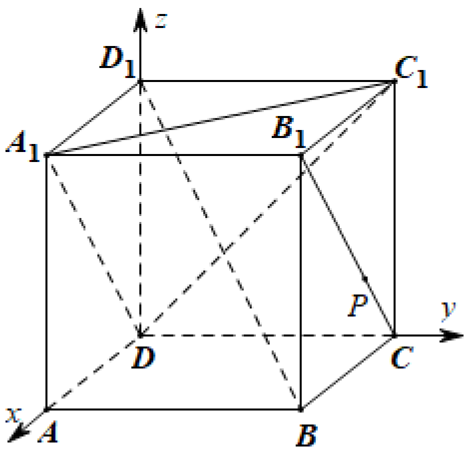
【解析】【分析】

本题考查了点面距离的向量求法，线面平行的向量表示，直线与直线所成角的向量求法，棱锥的体积，线面平行的判定和线面距离的概念，属于中档题.

以 *D* 为坐标原点，*DA*，*DC*，DD_1 所在直线分别为 *x*，*y*，*z* 轴，建立空间直角坐标系，利用点面距离的向量求法对 *A* 进行判断，再利用线面平行的向量表示对 *B* 进行判断，再利用直线与直线所成角的向量求法对 *C* 进行判断，再利用线面平行的判定得 $B_1C//$ 平面 A_1C_1D，再利用线面距离的概念和三棱锥体积对 *D* 进行判断，从而得结论.

【解答】

解：以 *D* 为坐标原点，*DA*，*DC*，DD_1 所在直线分别为 *x*，*y*，*z* 轴，建立空间直角坐标系，如下图：



因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，

所以 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$D_1(0,0,1)$.

对于 A. 因为 $\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，

设平面 A_1C_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，