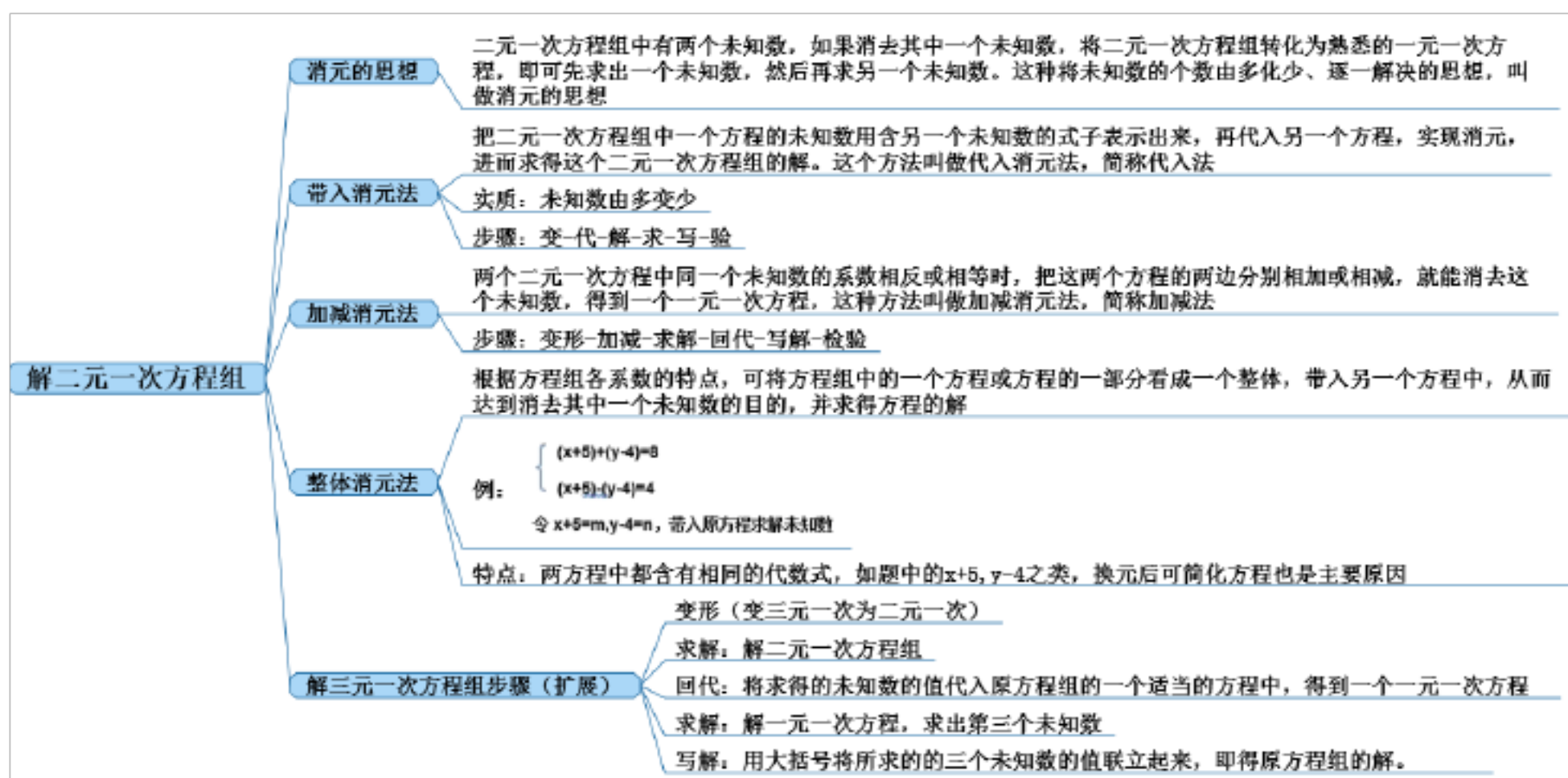


专题 15 解二元一次方程组

知识网络



重难点突破

知识点一 消元的思想：二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，将二元一次方程组转化为熟悉的一元一次方程，即可先求出一个未知数，然后再求另一个未知数。这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元的思想。

代入消元法：把二元一次方程组中一个方程的未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解。这个方法叫做代入消元法，简称代入法。

基本思路：未知数由多变少。

代入消元法解二元一次方程组的一般步骤：

1. 变：将其中一个方程变形，使一个未知数用含有另一个的未知数的代数式表示。
2. 代：用这个代数式代替另一个方程中的相应未知数，得到一元一次方程。
3. 解：解一元一次方程
4. 求：把求得的未知数的值代入代数式或原方程组中的任意一个方程中，求得另一个未知数的值。
5. 写：写出方程组的解。
6. 验：将方程组的解带入到原方程组中的每个方程中，若各方程均成立，则这对数值就是原方程组的解，负责解题有误。

加减消元法：两个二元一次方程中同一个未知数的系数相反或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程，这种方法叫做加减消元法，简称加减法。

加减消元法解二元一次方程组的一般步骤：

1. 变形：将两个方程中其中一个未知数的系数化为相同（或互为相反数）。
2. 加减：通过相减（或相加）消去这个未知数，得到一个一元一次方程。
3. 求解：解这个一元一次方程，得到一个未知数的值。
4. 回代：将求得的未知数的值代入原方程组中的任意一个方程，求出另一个未知数的值。
5. 写解：写出方程组的解。
6. 检验：将方程组的解带入到原方程组中的每个方程中，若各方程均成立，则这对数值就是原方程组的解，负责解题有误。

整体消元法：根据方程组各系数的特点，可将方程组中的一个方程或方程的一部分看成一个整体，带入另一个方程中，从而达到消去其中一个未知数的目的，并求得方程的解。

例
$$\begin{cases} (x+5)+(y-4)=8 \\ (x+5)-(y-4)=4 \end{cases}$$

令 $x+5=m$, $y-4=n$ ，带入原方程求解未知数

原方程可写为

$$\begin{cases} m+n=8 \\ m-n=4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{解得 } m=6, n=2 \\ \text{所以 } x+5=6, y-4=2 \end{array} \quad \text{所以 } \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$$

特点：两方程中都含有相同的代数式，如题中的 $x+5$, $y-4$ 之类，换元后可简化方程也是主要原因。

解二元一次方程的基本步骤：

1. 消元
2. 求解
3. 回代
4. 写解
5. 检验

解三元一次方程的基本步骤

1. 变形（变三元一次为二元一次）
2. 求解：解二元一次方程组
3. 回代：将求得的未知数的值代入原方程组的一个适当的方程中，得到一个一元一次方程
4. 求解：解一元一次方程，求出第三个未知数
5. 写解：用大括号将所求的三个未知数的值联立起来，即得原方程组的解。

【典型例题】

题型一 用代入法解二元一次方程组

典例 1（2018·长沙市期末）由方程组
$$\begin{cases} x+m=6 \\ y-3=m \end{cases}$$
 可得出 x 与 y 的关系式是()

- A. $x+y=9$ B. $x+y=3$ C. $x+y=-3$ D. $x+y=-9$

【答案】A

【解析】

由①得： $m=6-x$

$$\therefore 6-x=y-3$$

$$\therefore x+y=9.$$

故选 A.

变式 1-1 (2019·彬州市期中) 用代入消元法解方程组 $\begin{cases} 3x+4y=2 \text{ ①} \\ 2x-y=5 \text{ ②} \end{cases}$ 使得代入后化简比较容易的变形是()

A. 由①得 $x = \frac{2-4y}{3}$

B. 由①得 $y = \frac{2-3x}{4}$

C. 由②得 $x = \frac{y+5}{2}$

D. 由②得 $y=2x-5$

【答案】D

【详解】

解：观察方程①②可知，②中的系数为-1，比其它未知数的系数更为简单，所以只要将②变形为 $y=2x-5$ ③，再把③代入①即可求出方程组的解。

故应选 D.

变式 1-2 (2019·平顶山市期中) 方程 $\begin{cases} y=1-x \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ 的公共解是()

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

【答案】C

【详解】

把方程 $y=1-x$ 代入 $3x+2y=5$ ，得 $3x+2(1-x)=5$ ，

解得： $x=3$ 。

把 $x=3$ 代入方程 $y=1-x$ ，得 $y=-2$ 。

故选 C.

变式 1-3 (2019·成都市期中) 以方程组 $\begin{cases} y=2-2x \\ y=5+x \end{cases}$ 的解为坐标的点(y, x)在第()象限.

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

【答案】D

【详解】

解方程组得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$,

(4, -1) 位于第四象限.

故选 D.

题型二 用加减法解二元一次方程组

典例 2 (2019·保定市期末) 已知 a, b 满足方程组 $\begin{cases} a + 5b = 12 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$ 则 a+b 的值为 ()

- A. -4 B. 4 C. -2 D. 2

【答案】B

【解析】

试题解析: $\begin{cases} a + 5b = 12 \text{ ①} \\ 3a - b = 4 \text{ ②} \end{cases}$,

①+②: $4a+4b=16$

则 $a+b=4$,

故选 B.

变式 2-1 (2019·许昌市期末) 利用加减消元法解方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = 10, \text{ ①} \\ 5x - 3y = 6 \text{ ②} \end{cases}$, 下列做法正确的是 ()

- A. 要消去 y, 可以将①×5+②×2
B. 要消去 x, 可以将①×3+②×(-5)
C. 要消去 y, 可以将①×5+②×3
D. 要消去 x, 可以将①×(-5)+②×2

【答案】D

【解析】

试题分析: 由已知可得, 消元的方法有两种, 分别为:

(1) 要消去 y, 可以将①×3+②×5;

(2) 要消去 x, 可以将①×(-5)+②×2.

故选 D

变式 2-2 (2019·淮南市期末) 若 $|3x-2y-1| + \sqrt{x+y-2} = 0$, 则 x, y 的值为 ()

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

【答案】 D

【解析】

详解：∵ $|3x-2y-1| + \sqrt{x+y-2} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

将方程组变形为 $\begin{cases} 3x-2y=1 \text{①} \\ x+y=2 \text{②} \end{cases}$,

①+②×2 得, $5x=5$, 解得 $x=1$,

把 $x=1$ 代入①得, $3-2y=1$, 解得 $y=1$,

$$\therefore \text{方程组的解为} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

故选: D.

变式 2-3 (2020·崇左市期末) 用加减法解方程组 $\begin{cases} 2x-3y=5 \text{①} \\ 3x-2y=7 \text{②} \end{cases}$ 下列解法错误的是 ()

- A. ①×3-②×2, 消去 x B. ①×2-②×3, 消去 y
C. ①×(-3)+②×2, 消去 x D. ①×2-②×(-3), 消去 y

【答案】 D

【解析】

本题考查了加减法解二元一次方程组

用加减法解二元一次方程组时, 必须使同一未知数的系数相等或者互为相反数. 如果系数相等, 那么相减消元; 如果系数互为相反数, 那么相加消元.

A、①×3-②×2, 可消去 x, 故不合题意;

B、①×2-②×3, 可消去 y, 故不合题意;

C、①×(-3)+②×2, 可消去 x, 故不合题意;

D、①×2-②×(-3), 得 $13x-12y=31$, 不能消去 y, 符合题意.

故选 D.

题型三 用特殊法解二元一次方程组

典例 3 (2018·南通市期末) 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2ax+3y=18 \\ -x+5by=17 \end{cases}$ (其中 a, b 是常数) 的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$, 则方

程组 $\begin{cases} 2a(x+y)+3(x-y)=18 \\ (x+y)-5b(x-y)=-17 \end{cases}$ 的解为 ()

- A. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=3.5 \\ y=-0.5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=3.5 \\ y=0.5 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

由题意知: $\begin{cases} x+y=3 & \text{①} \\ x-y=4 & \text{②} \end{cases}$, ①+②, 得: $2x=7, x=3.5$, ①-②, 得: $2y=-1, y=-0.5$, 所以方程组的解

为 $\begin{cases} x=3.5 \\ y=-0.5 \end{cases}$.

故选 C.

变式 3-1 (2019·泰兴市期中) 若方程组 $\begin{cases} m+5n=1+2a \\ 6m+2n=3-a \end{cases}$ 的解满足 $m+n=3$, 则 a 的取值是 ()

- A. $a=-17$ B. $a=17$ C. $a=20$ D. a 不能确定

【答案】B

【详解】

$\begin{cases} m+5n=1+2a & \text{①} \\ 6m+2n=3-a & \text{②} \end{cases}$, ①+②得: $7(m+n)=a+4$, 即 $m+n=\frac{a+4}{7}$, 代入 $m+n=3$ 得: $\frac{a+4}{7}=3$, 解得:

$a=17$, 故选 B.

变式 3-2 (2019·萧山区期末) 若方程组 $\begin{cases} ax+y=c \\ a_1x+y=c_1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, 则方程组 $\begin{cases} ax+y=a-c \\ a_1x+y=a_1-c_1 \end{cases}$ 的解是

()

- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

【答案】D

【详解】

$$\therefore \begin{cases} a_1 x + y = a_1 - c_1 \\ a_2 x + y = a_2 - c_2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a_1(1-x) - y = c_1 \\ a_2(1-x) - y = c_2 \end{cases}.$$

设 $1-x=m$, $-y=n$, 则方程组可变为

$$\begin{cases} a_1 m + n = c_1 \\ a_2 m + n = c_2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{方程组} \begin{cases} a_1 x + y = c_1 \\ a_2 x + y = c_2 \end{cases} \text{的解是} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 1-x = 2 \\ -y = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

故选 D.

变式 3-3 (2018·海安市期中) 若方程组 $\begin{cases} 2m-3n=7 \\ 3m+5n=1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$, 则方程组 $\begin{cases} 2(x+1)-3(y-2)=7 \\ 3(x+1)+5(y-2)=1 \end{cases}$ 的

解是 ()

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$

【答案】A

【解析】

解: 令 $x+1=m$, $y-2=n$, \therefore 方程组 $\begin{cases} 2(x+1)-3(y-2)=7 \\ 3(x+1)+5(y-2)=1 \end{cases}$ 可化为 $\begin{cases} 2m-3n=7 \\ 3m+5n=1 \end{cases}$. \therefore 方程组 $\begin{cases} 2m-3n=7 \\ 3m+5n=1 \end{cases}$ 的

解是 $\begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$, $\therefore x+1=2$, $y-2=-1$, 解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. 故选 A.

题型四 二元一次方程错解复原问题

典例 4 (2019·齐齐哈尔市期末) 甲、乙两人共同解关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax+by=5 & \text{①} \\ 3x+cy=2 & \text{②} \end{cases}$, 甲正确地解得

$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 乙看错了方程②中的系数 c , 解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, 则 $(a+b+c)^2$ 的值为 ()

- A. 16 B. 25 C. 36 D. 49

【答案】 B

【详解】

把 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 代入得: $\begin{cases} 2a-b=5 \\ 6-c=2 \end{cases}$, 解得: $c=4$, 把 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 代入得: $3a+b=5$, 联立得: $\begin{cases} 2a-b=5 \\ 3a+b=5 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$,

则 $(a+b+c)^2 = (2-1+4)^2 = 25$.

故选 B.

变式 4-1 (2018 临沂市期末) 在解方程组 $\begin{cases} ax+5y=10 \\ 4x-by=-4 \end{cases}$ 时, 由于粗心, 甲看错了方程组中的 a , 得到的解

为 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$, 乙看错了方程组中的 b , 得到的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$. 则原方程组的解 ()

- A. $\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=15 \\ y=8 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-5 \\ y=8 \end{cases}$

【答案】 B

【详解】

把甲得到的解代入第二个方程, 得 $b=8$; 把乙得到的解代入第一个方程, 得 $a=-2$;

则得到方程 $\begin{cases} -2x+5y=10 \\ 4x-8y=-4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=15 \\ y=8 \end{cases}$, 故选择 B.

变式 4-2 (2019·贵港市期中) 小亮在解二元一次方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx-7y=8 \end{cases}$ 时, 把系数 c 看错而解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$, 而

原方程组的正确解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$, 那么系数 a, b, c 的值是 ()

- A. 不能确定 B. $a=4, b=7, c=2$
C. a 和 b 不能确定, $c=-2$ D. $a=4, b=5, c=-2$

【答案】D

【详解】

解：把 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 代入 $cx-7y=8$ ，解得 $c=-2$ ，

把 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 代入 $ax+by=2$ 得出 $\begin{cases} -2a+2b=2 \\ 3a-2b=2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$ ，

所以 $a=4, b=5, c=-2$ 。

故选：D。

题型五 构造二元一次方程组求解

典例 5 (2019·成都市期末) 新运算“ Δ ”定义为 $(a, b)\Delta(c, d)=(ac+bd, ad+bc)$ ，如果对于任意数 a, b 都有 $(a, b)\Delta(x, y)=(a, b)$ ，则 $(x, y)=(\quad)$

- A. (0, 1) B. (0, -1) C. (-1, 0) D. (1, 0)

【答案】D

【详解】

由新定义，知： $(a, b)\Delta(x, y)=(ax+by, ay+bx)=(a, b)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} ax+by=a \text{①} \\ ay+bx=b \text{②} \end{cases}$$

由①+②，得： $(a+b)x+(a+b)y=a+b$ ，

$\because a, b$ 是任意实数， $\therefore x+y=1$ ，③

由①-②，得

$(a-b)x-(a-b)y=a-b$ ， $\therefore x-y=1$ ，④

由③④解得， $x=1, y=0$ ，

$\therefore (x, y)$ 为 $(1, 0)$ ；

故选 D。

变式 5-1 (2019·佳木斯市期末) 已知 $\frac{3}{5}x^{m+n}y^{m-n}$ 与 $-9x^{7-m}y^{1+n}$ 的和是单项式，则 m, n 的值分别是()。

- A. $m=-1, n=-7$ B. $m=3, n=1$
C. $m=\frac{29}{10}, n=\frac{6}{5}$ D. $m=\frac{5}{4}, n=-2$

【答案】B

【详解】

$$\text{由题意得: } \begin{cases} m+n=7-m \\ m-n=1+n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases},$$

故选 B.

变式 5-2 (2018 内江市期末) 如果 $(x+y-5)^2$ 与 $|3x-2y+10|$ 互为相反数, 则 x, y 的值为 ()

A. $x=3, y=2$ B. $x=2, y=3$ C. $x=0, y=5$ D. $x=5, y=0$

【答案】 C

【详解】

$\because (x+y-5)^2$ 与 $|3y-2x+10|$ 互为相反数,

$\therefore (x+y-5)^2 + |3y-2x+10| = 0,$

$$\begin{cases} x+y-5=0 \text{①} \\ 3y-2x+10=0 \text{②} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}.$$

故选 C.

变式 5-3 (2019·吉水县期中) 如果 $3x^{2n-1}y^m$ 与 $-5x^m y^3$ 是同类型项, 那么 m 和 n 的值分别是()

A. 3 和 -2

B. -3 和 2

C. 3 和 2

D. -3 和 -2

【答案】 C

【详解】

由题意可得:

$$\begin{cases} 2n-1=m \\ m=3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases},$$

故选 C.

题型六 已知二元一次方程组的解满足的条件求参数

典例 6 (2018·济南市期末) 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} mx+ny=7 \\ nx-my=1 \end{cases}$ 的解, 则 $m+3n$ 的值是 ()

A. 4 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】D

【解析】

详解: 根据题意, 将 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} mx+ny=7 \\ nx-my=1 \end{cases}$, 得: $\begin{cases} 2m+n=7 \text{①} \\ -m+2n=1 \text{②} \end{cases}$,

①+②, 得: $m+3n=8$,

故选 D.

变式 6-1 (2018·淄博市期中) 如果方程组 $\begin{cases} 5x-4y=k \\ 3x+5y=8 \end{cases}$ 的解中的 x 与 y 相等, 则 k 的值为 ()

A. 1 B. 1 或 -1 C. 5 D. -5

【答案】A

【详解】

由题意可得方程组 $\begin{cases} 3x+5y=8 \\ x=y \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,

把 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程 $5x-4y=k$, 得 $k=5-4=1$,

故选 A.

变式 6-2 (2019·安定县期中) 已知方程组 $\begin{cases} 3x+5y=k+2 \\ 2x+3y=k \end{cases}$, x 与 y 的值之和等于 2, 则 k 的值为 ()

A. 4 B. -4 C. 3 D. -3

【答案】A

【解析】

详解: $\begin{cases} 3x+5y=k+2 \text{①} \\ 2x+3y=k \text{②} \end{cases}$,

①×2-②×3 得: $y=2(k+2)-3k=-k+4$,

把 $y=-k+4$ 代入②得: $x=2k-6$,

又 x 与 y 的值之和等于 2, 所以 $x+y=-k+4+2k-6=2$,

解得: $k=4$

故选 A

变式 6-3 (2019·巴彦淖尔市期末) 若二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=a, \\ x+y=3a \end{cases}$ 的解是二元一次方程 $3x-5y-7=0$ 的一

个解, 则 a 为 ()

A. 3

B. 5

C. 7

D. 9

【答案】C

【详解】

解: 解方程组 $\begin{cases} x-y=a \\ x+y=3a \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=2a \\ y=a \end{cases}$,

把 $x=2a$, $y=a$ 代入方程 $3x-5y-7=0$, 得 $6a-5a-7=0$,

解得: $a=7$.

故选 C.

题型七 同解方程组

典例 7 (2020·金牛区期末) 已知方程组 $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-2y=m \end{cases}$ 中的 x , y 互为相反数, 则 m 的值为 ()

A. 2

B. -2

C. 0

D. 4

【答案】D

【详解】

由题意得: $x+y=0$, 即 $y=-x$,

代入方程组得:

$$\begin{cases} 3x=4 \\ 3x=m \end{cases}$$

解得: $m=3x=4$,

故选: D.

变式 7-1 (2019·临沂市期末) 如果方程组 $\begin{cases} ax-by=13 \\ 4x-5y=41 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} ax+by=3 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$ 有相同的解, 则 a , b 的值是 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/396221042021010053>