2003年考研数学(二)真题

一、填空题(此题共6小题,每题4分,总分值24分.把答案填在题中横线上) 1

(1)假设 XT 0 时,(1 - ax 2)4 -1 与 xsinx 是等价无穷小,那么 a= .

(2) 设函数 y=f(x) 由方程 xy +21nx = y 4所确定,那么曲线 y=f(x) 在点(1,1)处的切线方程 是 .

(3) y =2 x的麦克劳林公式中 xn 项的系数是 .

(4)设曲线的极坐标方程为 P=ea8(a >0), 那么该曲线上相应于 日从0变到 2n 的一段弧与极轴所

围成的图形的面积为 .

1-11

(5) 设u为3维列向量,aT是a的转置.假设 otc(T= -11—1 ,那么

-J- 11 一

: - T : - =

101

(6)设三阶方阵 A,B满足 A2B — A —B = E,其中 E为三阶单位矩阵,假设 A= 020,那么

: 一 201 一

、选择题(此题共6小题,每题4分,?茜分24分.每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设{a_n}, {bj {g} 均为非负数列,且 lim a n =0, lim b =1 ,lim g ,那么必有

(A) a_n <b_n 对任意 n 成立. (B) b_n < C_n 对任意 n 成立.

(C)极限 nmanCn 不存在. (D)极限 nmbnCn 不存在.

3 _n_

(2)设 an =- ^n + xn^v1 +x ndx,那么极限 四中2门等于

(A) (1 e) 3 2 1. (B) (1 - e) 3 1 二 2 -1.

(C) (1 e]) 3 2 1. (D) (1 e) 3 2 -1.

(3)y = X / ln X 是微分方程 y' = ' +中(>)的解,那么中泠)的表达式为

(A)±. y 2 / X (B) 2 / X

(C) (D) []

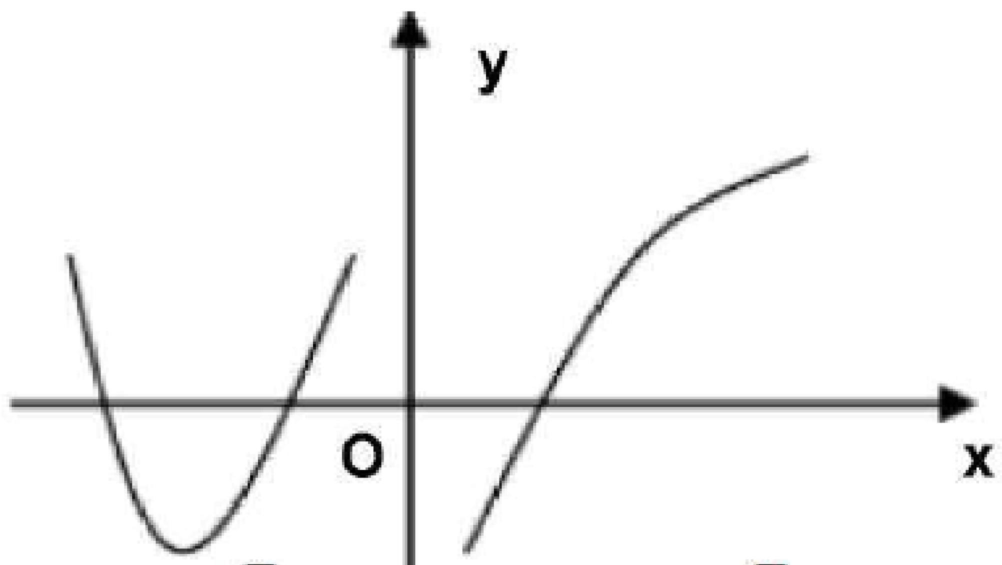
(4) 设函数 f(x) 在(_oo, +oc) 内连续, 其导函数的图形如下图, 那么 f(x) 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点



5）设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$，则

(B) 1 I $_1$1$_2$.

(C) I $_2$ I $_i$ 1. (D) 1 I $_2$ I $_i$.

(6) 设向量组 I： %, □$_2$, ⋯Pr 可由向量组 II： $_{81}$, 葭, $_{,Bs}$ 线性表示, 那么

(A) 当 r <s 时, 向量组 II 必线性相关.(B) 当 r >s 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 r <s 时, 向量组 I 必线性相关.(D) 当 r AS时, 向量组 I 必线性相关.

[]

三、(此题总分值 10 分)

ln(1

+ax$_3$) , x

<0,

x -arcsin x

设函数 f (x) = □6, x = 0,

ax 2

e +x -ax- $_1$ x>0,

x ,

xsin —

L4

问 a 为何值时, f(x) 在 x=0 处连续；a 为何值时, x=0 是 f(x) 的可去间断点？

四、(此题总分值 9 分)

' x=1+2t$_2$, . 2

d y

设函数 y=y(x) 由参数万程 $_1$产 $_1$$_n$^{t}e 代〉1) 所确正, 求 一 $_2$

|y = [——dudx$_{x=9}$

1 u

五、(此题总分值 9 分)

计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

六、(此题总分值 12 分)

设函数 y=y(x) 在(_co,□)内具有二阶导数,且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 y=y(x) 的反函数.

(1)试将 x=x(y) 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)(\frac{dx}{dy})^3 = 0$ 变换为 y=y(x) 满足的微分方程;

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

七、(此题总分值 12 分)

讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

八、(此题总分值 12 分)

设位于第一象限的曲线 y=f(x) 过点$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$,其上任一点 P(x,y) 处的法线与 y 轴的交点为 Q,且线段 PQ被 x 轴平分.

(1)求曲线 y=f(x) 的方程;

(2)曲线 y=sinx 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l,试用 l 表示曲线 y=f(x) 的弧长 s.

九、(此题总分值 10 分)

有一平底容器,其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)(y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图),容器的底面圆的半径为 2 m.根据设计要求,当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时,液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前,容器内无液体)

(1)根据 t 时刻液面的面积,写出 t 与$\varphi(y)$之间的关系式;

(2)求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注:m表示长度单位米,min 表示时间单位分.)

十、(此题总分值 10 分)

设函数 f(x) 在闭区间[a,b]上连续,在开区间(a,b) 内可导,且 $f'(x) > 0$. 假设极限 $\lim_{x \to a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在证明:

(1)在(a,b) 内 f(x)>0;

(2)在(a,b) 内存在点ξ使 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$

(3) 在(a,b) 内存在与(2)中ξ相异的点η,使 $f'(\eta)(b^2-a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a}\int_a^b f(x)dx$.

十一、〔此题总分值 10 分〕

2 2 0

假设矩阵 A= 8 2a 相似于对角阵 A,试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 P/AP=A.

0 0 6_

十二、〔此题总分值 8 分〕

平面上三条不同直线的方程分别为

11 : ax +2by +3c = 0 ,

12 : bx +2cy +3a = 0,

13 : cx 2ay 3b = 0 .

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 a+b + c = 0.

2003 年考研数学(二)真题评注

一、填空题(此题共 6 小题,每题 4 分,总分值 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 假设 $x \to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,那么 a=<u>-4</u>.

【分析】 根据等价无穷小量的定义,相当于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=1$,反过来求 a. 注意在计算过程中应尽可能地应用无穷小量的等价代换进行化简.

【详解】当 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1 \sim -\frac{1}{4}ax^2$, $x\sin x \sim x^2$.

于是,根据题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a=1$,故 a=-4.

(2) 设函数 y=f(x) 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,那么曲线 y=f(x) 在点(1,1)处的切线方程是 <u>x-y=0</u> .

【分析】先求出在点(1,1)处的导数,然后利用点斜式写出切线方程即可

【详解】 等式 $xy+2\ln x=y^4$ 两边直接对 x 求导,得

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y',$$

将 x=1,y=1 代入上式,有 $y'(1)=1$. 故过点(1,1)处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1),\quad 即\ x-y=0.$$

【评注】此题属常规题型,综合考查了隐函数求导与求切线方程两个知识点

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{\frac{(\ln 2)^n}{n!}}$

【分析】此题相当于先求 y=f(x) 在点 x=0 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$,那么麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

【详解】由于 $y'=2^x\ln 2, y''=2^x(\ln 2)^2,\cdots,y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n$,于是有

$y^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$,故麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

【评注】 此题属常规题型,在一般教材中都可找到答案ˆ

(4)设曲线的极坐标方程为 P =ea%a > 0),那么该曲线上相应于 日从 0 变到 2n 的一段弧与极轴所

围成的图形的面积为工〔e4[a -1〕

4a

【分析】 利用极坐标下的面积计算公式 S=1 fp2〔e〕d 日即可.

所求面积为

S=11P2(9)da =1 j“e 2a9dH

1 2a r 2 二」(e 4a -1).

=e 0 4a

4a

【评注】 此题考查极坐标下平面图形的面积计算,也可化为参数方程求面积,但计算过程比拟复杂

1-11

(5) 设 ct 为 3 维列向量,aT是 a 的转置.假设& = -11—1 ,那么

1-11 _

T

、工、工=3

【分析】 此题的关键是矩阵〔 的秩为 1,必可分解为一夕 行的形式,而行向量一般可选第

行〔或任一非零行〕,列向量的元素那么 各行与选定行的倍数构成

1-1 1 [1] —1 1

[详解]由 aaT = -11 -1 = -1 1 -1 1],知 -1 ,于是

: 1-1 1 _ J _ J —

— 1〕

a[=1 -1 1] -1 =3.

J J

【评注】一般地,假设 n 阶矩阵 A的秩为 1 ,那么必有 A =— b b2 …bn】

_an

101

〔6〕设三阶方阵 A,B 满足 A2 3—A —B = E ,其中 E 为三阶 1 位矩阵,假设 A=020,那么 8 =

-201 _

1

.

2

【分析】 先化简分解出矩阵 B,再取行列式即可

【详解】 由 A2B — A —B =E 知,

(A2 — E)B=A + E ,即 (A + E)(A —E)B = A + E ,

易知矩阵A+E可逆，于是有 $(A - E)B = E.$

再两边取行列式，得 $|A - E| |B| = 1$，

由于 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$，所以

【评注】 此题属基此题型，综合考查了矩阵运算与方阵的行列式，此类问题一般都应先化简再计算 二、选择题(此题共6小题，每题4分，工茜分24分. 每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 土匀为非负数歹U，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$，那么必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. [D]

【分析】 此题考查极限概念，极限值与数列前面有限项的大小无关，可立即排除 (A),(B); 而极限 $\lim_{n\to\infty} a_n c_n$ 是 $0 \cdot \infty$ 型未定式，可能存在也可能不存在，举反例说明即可；极限 $\lim_{n\to\infty} b_n c_n$ 属 $1 \cdot \infty$ 型，必为无穷大量，即不存在.

【详解】用举反例法，取 $a_n = \frac{2}{n}$，$b_n = 1$，$c_n = \frac{1}{2}n (n=1,2,\cdots)$，那么可立即排除(A),(B),(C)， 因此正确选项为(D).

【评注】 对于不便直接证实的问题，经常可考虑用反例，通过排除法找到正确选项^

$a_n = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，那么极限 $\lim_{n\to\infty} na_n$ 等于

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

【分析】 先用换元法计算积分，再求极限

由于

$$a_n = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx = \frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n}\,d(1+x^n)$$

$$= \frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right\},$$

可见 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right\} = (1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1.$

此题属常规题型,综合考查了定积分计算与求数列的极限两个知识点,但定积分和数列极限 的计算均是最根底的问题,一般教材中均可找到其计算方法ˆ

(3)y= 一是微分方程「=」十中(一)的解,那么中(一)的表达式为
In xxyy

(A) y x (B) 2 y x 2

2 x (C)-- y

2 x (D)— y

x . x

【分析】将 y = ——代入微分方程,再令中的中间变量为 u, 求出中(u) 的表达式,进而可计算出中(一).
In xy

x. y x
【详解】将丫= ——代入微分方程丫’=上+中(一),得
In xx y

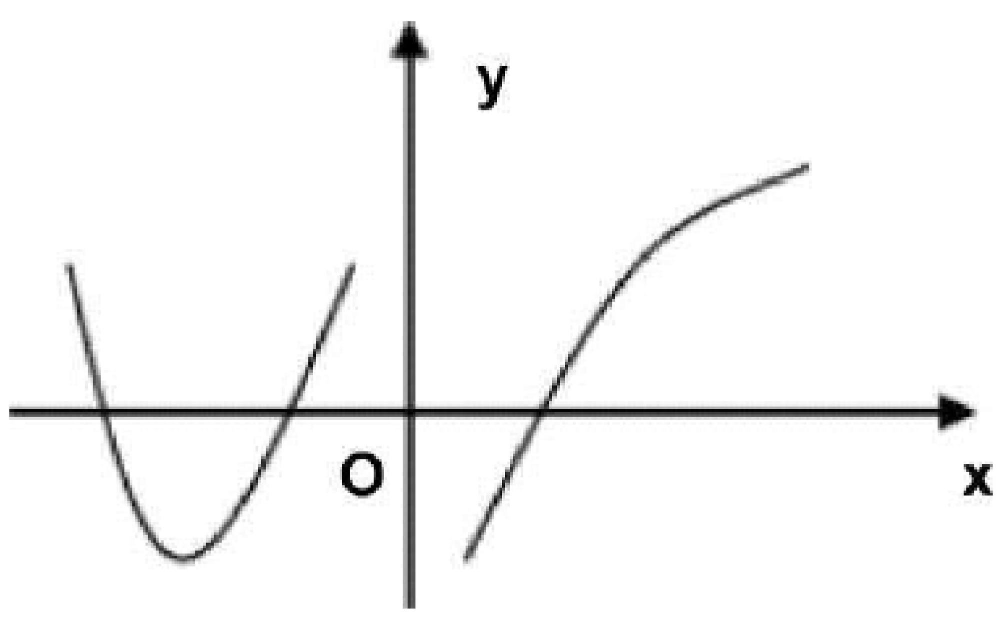
(In x) 工 $\frac{1}{\ln^2 x}$

令 Inx=u , 有 (u)=$-\frac{1}{u}$, 故 2 ˆ(−) =−−y. 应选(A).
y x 2

【评注】 此题巧妙地将微分方程的解与求函数关系结合起来,具有一定的综合性,但问题本身并不复 杂,只要仔细计算应该可以找到正确选项.

(4) 设函数 f(x) 在(口, y) 内连续,其导函数的图形如下图,那么 f(x) 有

(D) 一个极小值点和两个极大值点
(E) 两个极小值点和一个极大值点 (F) 两个极小值点和两个极大值点
(D) 三个极小值点和一个极大值点



【分析】答案与极值点个数有关,而可能的极值点应是导数为零或导数不存在的点,共 4 个,是极大值点还是极小值可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定ˆ

【详解】 根据导函数的图形可知,一阶导数为零的点有 3 个,而 x=0 那么是导数不存在的点. 三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致,必为极值点,且两个极小值点,一个极大值点; 在 x=0 左侧一阶导数为正,右侧一阶导数为负,可见 x=0 为极大值点,故 f(x) 共有两个极小值点和两个极大值点,应 选(C).

【评注】 此题属新题型,类似考题 2001 年数学一、二中曾出现过,当时考查的是 f(x) 的图象去

的图象,此题是其逆问题.完全类似例题在文登学校经济类串讲班上介绍过

(5)设 I_1 $\frac{}{x}dx, I_2$ $_0 \tan x$

(A) $I_1 I_2 1$.

(B) $1 I_1 I_2$.

(C) $I_2 I_i 1$.

(D) $1 I_2 I_i$.

直接计算 I_i, I_2 是困难的,可应用不等式 tanx>x, x>0.

【详解】 由于当 x>0 时,有 tanx>x, 于 $\frac{x}{\tan x}<1$,从而有 1_1 $dx > \frac{JI}{4}$,

$i_2 = \frac{二 X}{\tan x} dx :: \frac{冗}{4}$,

可见有 $I_1 > I_2$ 且 $I_2 < \frac{H}{4}$,可排除(A);(C);(D), 故应选(B).

【评注】 此题没有必要去证实 $I_1<1$,由于用排除法, (A),(C),(D) 均不正确,剩下的 (B) 一定为正确

(6)设向量组 I: %,0(2,...P「可由向量组 II:丸鼠

(A)当 $r<s$ 时,向量组 II 必线性相关.

(B)当 $r>s$ 时,向量组 II 必线性相关.

(C)当 $r<s$ 时,向量组 I 必线性相关.

(D)当 $r>s$ 时,向量组 I 必线性相关.

【分析】 此题为一般教材上均有的比拟两组向量个数的定理:假设向量组 I: □□2; ,r 可由向量组 II: 网,22,…,Ps 线性表示,那么当 $r>s$ 时,向量组 I 必线性相关.或其逆否命题:假设向量组可由向量组 II : $3, P_2, \cdots, P_s$ 线性表示,且向量组 I 线性无关,那么必有 $r<s$.可见正确选项为(D).此题也可通过举反例用排除法找到答案

【详解】 用排除法:如、 1 - ’0、 二 0「 串 2,但 P1,P2 线性无关,

排除(A); 0t 0;: 那么%尸 2 可由 3 线性表示,但 3 线性无关,排除(B);

1J %可由「1,「2 线性表示,但 1 线性无关,排除 (C). 故正确选项为(D).

【评注】 此题将一定理改造成选择题,如果考生熟知此定理应该可直接找到答案,假设记不清楚,

、(此题总分值 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时, f(x) 在 x=0 处连续; a 为何值时, x=0 是 f(x) 的可去间断点?

【分析】 分段函数在分段点 x=0 连续, 要求既是左连续又是右连续, 即

$f(0-0)=f(0)=f(0+0)$.

【详解】

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a.$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2a^2+4.$$

令 $f(0-0)=f(0+0)$, 有 $-6a=2a^2+4$, 得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 a=-1 时, $\lim_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$, 即 f(x) 在 x=0 处连续.

当 a=-2 时, $\lim_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$, 因而 x=0 是 f(x) 的可去间断点.

【评注】此题为基此题型, 考查了极限、连续与间断等多个知识点, 其中左右极限的计算有一定难度, 在计算过程中应尽量利用无穷小量的等价代换进行简化。

四、(此题总分值 9 分)

设函数 y=y(x) 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du\end{cases}(t>1)$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.