2023-2024学年湖南省长沙市一中3月高三数学试题试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．“$\tan\theta=2$”是“$\tan 2\theta=-\dfrac{4}{3}$”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

2．已知定点A,B都在平面α内，定点$P\notin\alpha, PB\perp\alpha, C$是$\alpha$内异于$A,B$的动点，且$PC\perp AC$，那么动点$C$在平面$\alpha$内的轨迹是（　　）

A．圆，但要去掉两个点

B．椭圆，但要去掉两个点

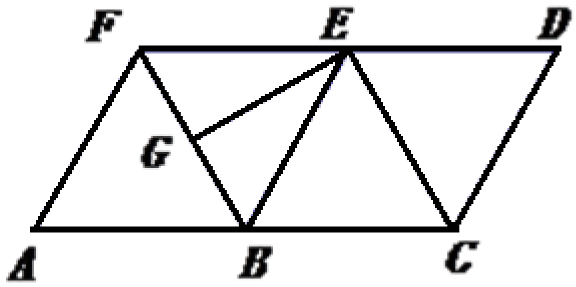
C．双曲线，但要去掉两个点

D．抛物线，但要去掉两个点

3．设$a=\log_{0.08}0.04$，$b=\log_{0.3}0.2$，$c=0.3^{0.04}$，则a、b、c的大小关系为（　）

A．$c>b>a$　B．$a>b>c$　C．$b>c>a$　D．$b>a>c$

4．下图为一个正四面体的侧面展开图，G为BF的中点，则在原正四面体中，直线EG与直线BC所成角的余弦值为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

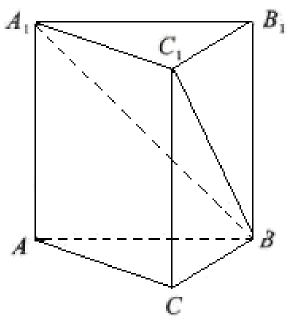
D．$\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

5．一个盒子里有4个分别标有号码为1，2，3，4的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取3次，则取得小球标号最大值是4的取法有（　　）

A．17种　B．27种　C．37种　D．47种

6．

《九章算术》中记载，堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱，阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥.如图，在堑堵$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AA_1=2$，当阳马$B-ACC_1A_1$体积的最大值为$\frac{4}{3}$时，堑堵$ABC-A_1B_1C_1$的外接球的体积为（　　）



A． $\frac{4}{3}\pi$　　**B．** $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　**C．** $\frac{32}{3}\pi$　　**D．** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

7．已知集合$A=\{x \mid x>0\}$，$B=\{x \mid x^2-x+b=0\}$，若$A\cap B=\{3\}$，则$b=$（　　）

A． -6　　**B．** 6　　**C．** 5　　**D．** -5

8．若$(1-2i)z=5i$（i是虚数单位），则$|z|$的值为（　　）

A．3　　**B．5**　　**C．** $\sqrt{3}$　　**D．** $\sqrt{5}$

9．设$\vec{m}$，$\vec{n}$为非零向量，则“存在正数λ，使得$\vec{m}=\lambda\vec{n}$”是“$\vec{m}\cdot\vec{n}>0$”的（　　）

A． 既不充分也不必要条件　　**B．** 必要不充分条件

C． 充分必要条件　　**D．** 充分不必要条件

10．设i为虚数单位，则复数$z=\frac{2}{1-i}$在复平面内对应的点位于(　　)

A． 第一象限　　**B．** 第二象限　　**C．** 第三象限　　**D．** 第四象限

11．在区间$[-3,3]$上随机取一个数x，使得$\frac{3-x}{x-1}\geq 0$成立的概率为等差数列$\{a_n\}$的公差，且$a_2+a_6=-4$，若$a_n>0$，则n的最小值为（　　）

A．8　　**B．9**　　**C．10**　　**D．11**

12．已知复数z满足$z(1+i)=4-3i$，其中i是虚数单位，则复数z在复平面中对应的点到原点的距离为（　　）

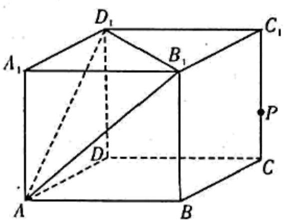
A． $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　**B．** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　**C．** $\frac{5}{2}$　　**D．** $\frac{5}{4}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知ΔABC中，$AB=BC$，点D是边BC的中点，ΔABC的面积为2，则线段AD的取值范围是__________.

14．若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N=f_{\alpha}(M)$.如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中，记平面 AB_1D_1 为 β，平面 $ABCD$ 为 γ，点 P 是线段 CC_1 上一动点，$Q_1=f_\gamma[f_\beta(P)],Q_2=f_\beta[f_\gamma(P)]$.给出下列四个结论：



①Q_2 为 $\triangle AB_1D_1$ 的重心；

②$Q_1Q_2\perp BD$；

③当 $CP=\dfrac{4}{5}$ 时，$PQ_1\parallel$ 平面 β；

④当三棱锥 D_1-APB_1 的体积最大时，三棱锥 D_1-APB_1 外接球的表面积为 2π.

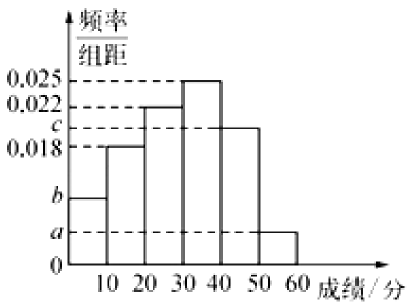
其中，所有正确结论的序号是________________.

15．已知向量 $\vec{a}=(1,x+1)$，$\vec{b}=(x,2)$，若满足 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，且方向相同，则 $x=$__________.

16．过圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心且与直线 $2x+3y=0$ 垂直的直线方程为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中，参考的文科生与理科生人数之比为 $1:4$，且成绩分布在 $[0,60]$ 的范围内，规定分数在 **50** 以上（含 **50**）的作文被评为“优秀作文”，按文理科用分层抽样的方法抽取 **400** 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图所示.其中 a,b,c 构成以 **2** 为公比的等比数列.



（1）求 a,b,c 的值；

（2）填写下面 2×2 列联表，能否在犯错误的概率不超过 **0.01** 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关？

	文科生	理科生	合计
获奖	**6**		
不获奖			

合计			400

（3）将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2\ldots k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.（12 分）已知动圆过定点 $F(0,1)$，且与直线 $l:y=-1$ 相切，动圆圆心的轨迹为 C，过 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 m 与 C 交于两点 A,B，过 A,B 分别作 C 的切线，两切线的交点为 P，直线 PF 与 C 交于两点 M,N.

（1）证明：点 P 始终在直线 l 上且 $PF\perp AB$；

（2）求四边形 $AMBN$ 的面积的最小值.

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=2\ln\left(x+1\right)+\sin x+1$，函数 $g\left(x\right)=ax-1-b\ln x$（$a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0$）.

（1）讨论 $g\left(x\right)$ 的单调性；

（2）证明：当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\leq 3x+1$.

（3）证明：当 $x>-1$ 时，$f\left(x\right)<\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{\sin x}$.

20.（12 分）已知 $f\left(x\right)=\left|x-a\right|+\left|x+b\right|\left(a>0,b>0\right)$.

（Ⅰ）当 $a=b=1$ 时，解不等式 $f\left(x\right)\leq 8-x^2$；

（Ⅱ）若 $f\left(x\right)$ 的最小值为 1，求 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b}$ 的最小值.

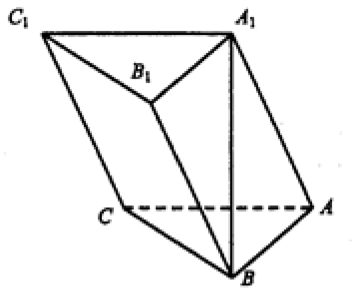
21.（12 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{\mathrm{n}^2+n+1}{\mathrm{n}^2+n}a_n+\dfrac{1}{2^n},n\in N^*$.

(Ⅰ)证明：当 $n\geq 2$ 时，$a_n\geq 2\quad\left(n\in N^*\right)$；

(Ⅱ)证明：$a_{n+1}=\dfrac{1}{1\cdot 2}a_1+\dfrac{1}{2\cdot 3}a_2+\cdots\ \dfrac{1}{n\cdot\left(n+1\right)}a_n+2-\dfrac{1}{2^n}$ ($n\in N^*$)；

(Ⅲ)证明：$a_n<\dfrac{43}{42}\sqrt{e}-1$, e 为自然常数.

22.（10 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1B\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，且 $AB=AC=A_1B=2$.



（1）求棱 AA_1 与 BC 所成的角的大小；

（2）在棱 B_1C_1 上确定一点 P，使二面角 $P-AB-A_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

首先利用二倍角正切公式由 $\tan 2\theta=-\frac{4}{3}$，求出 $\tan\theta$，再根据充分条件、必要条件的定义判断即可；

【详解】

解：$\because \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4}{3}$，$\therefore$可解得 $\tan\theta=2$ 或 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore$“$\tan\theta=2$”是“$\tan 2\theta=-\frac{4}{3}$”的充分不必要条件.

故选：**A**

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，二倍角正切公式的应用是解决本题的关键，属于基础题.

2、**A**

【解析】

根据题意可得 $AC\perp BC$,即知 ***C*** 在以 ***AB*** 为直径的圆上.

【详解】

Q $PB\perp\alpha, AC\subset\alpha$，

$\therefore PB\perp AC$，

又 $PC \perp AC$， $PB \cap PC = P$，

$\therefore AC \perp$平面 PBC ,又 $BC \subset$平面 PBC

$\therefore AC \perp BC$，

故 C 在以 AB 为直径的圆上，

又 C 是 α 内异于 A,B 的动点，

所以 C 的轨迹是圆，但要去掉两个点 ***A*,*B***

故选：***A***

【点睛】

本题主要考查了线面垂直、线线垂直的判定，圆的性质，轨迹问题，属于中档题.

3、D

【解析】

因为 $a = \log_{0.08} 0.04 = 2\log_{0.08} 0.2 = \log_{\sqrt{0.08}} 0.2 > \log_{\sqrt{0.08}} 1 = 0$， $b = \log_{0.3} 0.2 > \log_{0.3} 1 = 0$，

所以 $\frac{1}{a} = \log_{0.2} \sqrt{0.08}, \frac{1}{b} = \log_{0.2} 0.3$ 且 $y = \log_{0.2} x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $\sqrt{0.08} < 0.3$

所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$，所以 $b > a$，

又因为 $a = \log_{\sqrt{0.08}} 0.2 > \log_{\sqrt{0.08}} \sqrt{0.08} = 1$， $c = 0.3^{0.04} < 0.3^{0} = 1$，所以 $a > c$，

所以 $b > a > c$.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用指对数函数的单调性比较指对数的大小，难度一般.除了可以直接利用单调性比较大小，还可以根据中间值“$0,1$”比较大小.

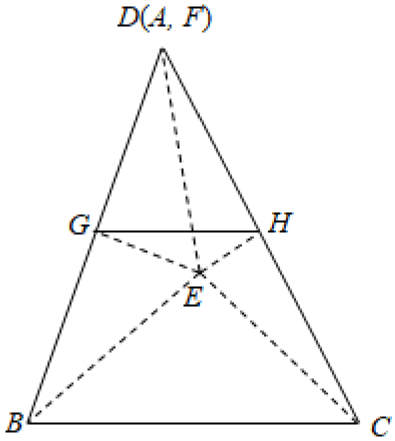
4、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A,D,F 三点重合，记作 D，取 DC 中点 H，连接 EG,EH,GH， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos\angle EGH$.

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A,D,F 三点重合，记作 D：



则G为BD中点，取DC中点H，连接EG,EH,GH，设正四面体的棱长均为a，

由中位线定理可得$GH//BC$且$GH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，

所以$\angle EGH$即为EG与直线BC所成的角，

$EG=EH=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

由余弦定理可得$\cos\angle EGH=\frac{EG^2+GH^2-EH^2}{2EG\cdot GH}$

$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线EG与直线BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

5、**C**

【解析】

由于是放回抽取,故每次的情况有 **4** 种,共有 **64** 种; 先找到最大值不是 **4** 的情况,即三次取出标号均不为 **4** 的球的情况,进而求解.

【详解】

所有可能的情况有$4^3=64$种,其中最大值不是 **4** 的情况有$3^3=27$种,所以取得小球标号最大值是 **4** 的取法有

$64-27=37$种,

故选:C

【点睛】

本题考查古典概型,考查补集思想的应用,属于基础题.

6、B

【解析】

利用均值不等式可得$V_{B-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}BC\cdot AC\cdot AA_1=\frac{2}{3}BC\cdot AC\le\frac{1}{3}\left(BC^2+AC^2\right)=\frac{1}{3}AB^2$,即可求得$AB$,进而求得外接球的半径,即可求解.

【详解】

由题意易得$BC\perp$平面ACC_1A_1,

所以$V_{B-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}BC\cdot AC\cdot AA_1=\frac{2}{3}BC\cdot AC\le\frac{1}{3}\left(BC^2+AC^2\right)=\frac{1}{3}AB^2$,

当且仅当$AC=BC$时等号成立,

又阳马$B-ACC_1A_1$体积的最大值为$\frac{4}{3}$,

所以$AB=2$,

所以堑堵$ABC-A_1B_1C_1$的外接球的半径$R=\sqrt{\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$,

所以外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$,

故选:B

【点睛】

本题以中国传统文化为背景,考查四棱锥的体积、直三棱柱的外接球的体积、基本不等式的应用,体现了数学运算、直观想象等核心素养.

7、A

【解析】

由$A\cap B=\{3\}$，得$3\in B$，代入集合B即可得b.

【详解】

$\because A\cap B=\{3\}$，$\therefore 3\in B$，$\therefore 9-3+b=0$，即：$b=-6$，

故选：A

【点睛】

本题考查了集合交集的含义，也考查了元素与集合的关系，属于基础题.

8、**D**

【解析】

直接利用复数的模的求法的运算法则求解即可.

【详解】

$\left(1-2i\right)z=5i$（i 是虚数单位）

可得$\left|\left(1-2i\right)\right|\left|z\right|=\left|5i\right|$

解得$\left|z\right|=\sqrt{5}$

本题正确选项：D

【点睛】

本题考查复数的模的运算法则的应用，复数的模的求法，考查计算能力.

9、**D**

【解析】

充分性中，由向量数乘的几何意义得$\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle =0^{\circ}$，再由数量积运算即可说明成立；必要性中，由数量积运算可得$\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle \in\left[0^{\circ},90^{\circ}\right)$，不一定有正数$\lambda$，使得$\vec{m}=\lambda\vec{n}$，所以不成立，即可得答案.

【详解】

充分性：若存在正数λ，使得$\vec{m}=\lambda\vec{n}$，则$\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle =0^{\circ}$，$\vec{m}\cdot\vec{n}=\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos 0^{\circ}=\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|>0$，得证；

必要性：若$\vec{m}\cdot\vec{n}>0$，则$\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle \in\left[0^{\circ},90^{\circ}\right)$，不一定有正数$\lambda$，使得$\vec{m}=\lambda\vec{n}$，故不成立；

所以是充分不必要条件

故选：**D**

【点睛】

本题考查平面向量数量积的运算，向量数乘的几何意义，还考查了充分必要条件的判定，属于简单题.

10、**A**

【解析】

利用复数的除法运算化简z，求得z对应的坐标，由此判断对应点所在象限.

【详解】

$\because z=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}=1+i$，$\therefore$对应的点的坐标为$\left(1,1\right)$，位于第一象限.

故选：**A.**

【点睛】