天津市耀华中学2024-2025学年高三上学期第二次月考数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x \middle| 2^x>1\right\}$，$B=\left\{x \middle| 2-x>0\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

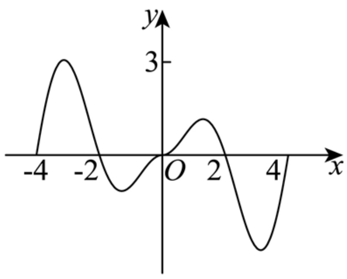
A．$(2,+\infty)$　　B．$(1,2)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,2)$

2．命题“$x+y\le 6$”是“$x\le 2$ 或 $y\le 4$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知函数 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　）



A．$f(x)=|x|\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}$　　B．$f(x)=x\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}$

C．$f(x)=|x|\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}$　　D．$f(x)=x\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}$

4．已知 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_{0.3}0.2$，$c=\log_2 3$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

A．$b<c<a$　　B．$c<b<a$　　C．$a<b<c$　　D．$a<c<b$

5．若直线 $l:mx-y=4$ 被圆 $C:x^2+y^2-2y-8=0$ 截得的弦长为 4，则 m 的值为（　）

A．± 2　　B．± 4　　C．$\pm\sqrt{2}$　　D．$\pm 2\sqrt{2}$

6．设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_n=\dfrac{S_n}{n}+2(n-1)$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n+3n}\right\}$ 的前 10 项和是（　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{9}{20}$　　C．$\dfrac{5}{11}$　　D．$\dfrac{10}{11}$

7．已知函数 $f\left(x\right)=\sin x\cos x+\cos^2 x$， $x\in\mathbf{R}$，下列命题中：

①$f\left(x\right)$的最小正周期是π，最大值是$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$；

②$f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1+\sin 2x$；

③$f\left(x\right)$的单调增区间是$\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）；

④将$f\left(x\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位得到的函数是偶函数，

其中正确个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥侧面积的一半，那么其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

9．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{|\ln x|}},x\in\left(0,+\infty\right)\\ \ln\left(1-x\right),x\in\left(-\infty,0\right]\end{cases}$，则下列说法中正确的是（　）

①函数$f\left(x\right)$有两个极值点；

②若关于x的方程$f\left(x\right)=t$恰有1个解，则$t>1$；

③函数$f\left(x\right)$的图象与直线$x+y+c=0$（$c\in\mathbf{R}$）有且仅有一个交点；

④若$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$，且$x_1<x_2<x_3$，则$\left(1-x_1\right)\left(x_2+x_3\right)$无最值．

A．①②　　B．①③④　　C．②③　　D．①③

二、填空题

10．若复数z满足$\left(1+2i\right)z+i=3$（i是虚数单位），则$|z|=$______．

11．在$\vee ABC$中，$\angle B=90^\circ, AB=3, BC=4$，以边$BC$所在直线为轴，将$\vee ABC$旋转一周，所成的曲面围成的几何体的体积为________．

12．设S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，已知$a_1=2$，对任意p、$q\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{p+q}=a_p+a_q$，则

$f\left(n\right)=\dfrac{S_n+60}{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的最小值为_____

13．设$a>b>c$且$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=1$，则$a+b$的范围为___________.

14．已知$\triangle ABC$中，$AB=6$，$AC=3$，且$\left|\lambda\overrightarrow{AB}+\left(2-2\lambda\right)\overrightarrow{AC}\right|\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$的最小值为$3\sqrt{3}$，若$P$为边$AB$上任意一点，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值是_____.

15．设$k\in\mathbf{R}$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}kx^2-x+1,x<0\\ \mathrm{e}^x-kx,x\geq 0\end{cases}$，若$f\left(x\right)$恰有两个零点，则$k$的取值范围是___

三、解答题

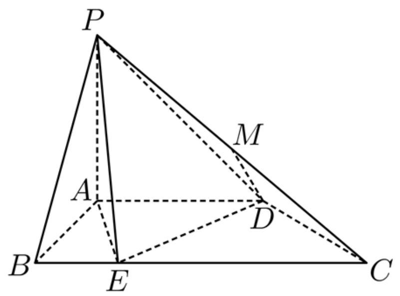
16．已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，满足已知$c\cos B+b\cos C=\dfrac{a}{2\cos A}$.

（1）求角A的大小；

（2）若$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\sin(2B+A)$的值；

（3）若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$a=3$，求$\triangle ABC$的周长.

17．在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，且$PA=2$，四边形$ABCD$是直角梯形，且$AB\perp AD$，$BC//AD$，$AD=AB=2$，$BC=4$，M为PC中点，E在线段BC上，且$BE=1$.



(1)求证：$DM//$平面PAB；

(2)求平面PDE与平面BDE夹角的余弦值；

(3)求点E到平面PDC的距离.

18.在公差不为零的等差数列$\left\{a_n\right\}$和等比数列$\left\{b_n\right\}$中，S_n为$\left\{a_n\right\}$的前n项和.已知$a_2=b_1=3$，$S_9=b_4$，且a_2是a_1与a_5的等比中项.

(1)求$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

(2)记数列$\left\{a_n\cdot b_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$；

(3)求$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{4k}{a_k\cdot a_{k+1}}$.

19．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，若椭圆的短轴长为$2\sqrt{3}$且经过点$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，过点$T\left(\sqrt{3},0\right)$的直线交椭圆于$P$，$Q$两点.

(1)求椭圆方程；

(2)求$\triangle OPQ$面积的最大值，并求此时直线PQ的方程；

(3)若直线PQ与x轴不垂直，在x轴上是否存在点$S\left(s,0\right)$使得$\angle PST=\angle QST$恒成立？若存在，求出s的值；若不存在，说明理由.

20．设函数$f\left(x\right)=\ln x+x^2-ax\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当$a=3$时，求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

(2)若函数$f\left(x\right)$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1\in\left(0,1\right]$，求证：$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\geq-\frac{3}{4}+\ln 2$；

(3)设$g\left(x\right)=f\left(x\right)+2\ln\frac{ax+2}{6\sqrt{x}}$，对于任意$a\in(2,4)$，总存在$x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$，使$g\left(x\right)>k\left(4-a^2\right)$成立，求实数$k$的取值范围.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
答案	D	A	C	C	A	C	C	D	D	

1．D

【分析】解不等式求得集合A,B，进而求得$A\cap B$.

【详解】$2^x>2^0,x>0$，所以$A=\left(0,+\infty\right)$，

$B=\left\{x\middle|2-x>0\right\}=\left(-\infty,2\right)$，

所以$A\cap B=\left(0,2\right)$.

故选：D

2．A

【分析】利用逆否命题判断充分性，再举反例判断必要性，从而得解.

【详解】当$x>2$且$y>4$时，$x+y>6$，

即“若$x>2$且$y>4$，则$x+y>6$”是真命题，

所以其逆否命题“若$x+y\le 6$，则$x\le 2$或$y\le 4$”也是真命题，即充分性成立；

当$x\le 2$或$y\le 4$时，取$x=1,y=9$，此时$x+y\le 6$不成立，即必要性不成立；

所以命题“$x+y\le 6$”是“$x\le 2$或$y\le 4$”的充分不必要条件.

故选：A.

3．C

【分析】根据函数的奇偶性以及特殊点来确定正确答案.

【详解】由图可知，函数为奇函数，所以AD选项错误.

$f\left(2\right)=0$，所以B选项错误.

故选：C

4．C

【分析】利用对数函数的单调性结合二次函数的性质即得.

【详解】$\because 0<a=\log_{0.2}0.3<1$，$b=\log_{0.3}0.2>1$，$c=\log_2 3>1$，

又$\dfrac{b}{c}=\log_{0.3}0.2\cdot\log_3 2=\dfrac{\lg 2-1}{\lg 3-1}\cdot\dfrac{\lg 2}{\lg 3}=\dfrac{\lg^2 2-\lg 2}{\lg^2 3-\lg 3}$，

因为函数$f\left(x\right)=x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，且$f\left(0\right)=0$，

又因为$\frac{1}{2}>\lg 3>\lg 2>0$，

所以$f\left(\lg 3\right)<f\left(\lg 2\right)<0$，所以$\frac{f\left(\lg 2\right)}{f\left(\lg 3\right)}<1$，即$\frac{\lg^2 2-\lg 2}{\lg^2 3-\lg 3}<1$，所以$\frac{b}{c}<1$，

$\therefore b<c$，即$a<b<c$.

故选：C

5．A

【分析】根据题目得到圆C的圆心和半径，利用几何法来表示弦长即可求得结果.

【详解】由题知，圆C的圆心为$\left(0,1\right)$，半径为$\frac{\sqrt{4+32}}{2}=3$，

由弦长为$2\sqrt{3^2-\left(\frac{\left|0-1-4\right|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2}=4$，解得$m=\pm 2$.

故选：A

6．C

【分析】利用a_n与S_n的关系判断数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，然后求出$S_n$，再由裂项相消法可得.

【详解】当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{S_n}{n}+2\left(n-1\right)$，整理得$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=2$，

又$\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=1$，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，

所以$\frac{S_n}{n}=2n-1$，得$S_n=2n^2-n$，

又$\frac{1}{S_n+3n}=\frac{1}{2n^2+2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{S_n+3n}\right\}$的前 10 项和为：

$$T_{10}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}.$$

故选：C

7．C

【分析】化简可得$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，即可求出周期、最大值，得出①；代入化简$f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，即可得出②；解$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$

，即可得出③；根据图象平移，得出$g\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}$，求出$g\left(-x\right)$即可判断④.

【详解】$f\left(x\right)=\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$.

对于①，$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

因为$-1\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，所以$f\left(x\right)$的最大值为$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，故①正确；

对于②，$f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\pi-2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1=\sin 2x+1$，故②正确；

对于③，由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$可得，$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以，$f\left(x\right)$的单调增区间是$\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），故③正确；

对于④，将$f\left(x\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位得到的函数为

$g\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}$，

$g\left(-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-2x\right)+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\ne -g\left(x\right)$，故④错误.

综上所述，①②③正确.

故选：C.

8．D

【分析】根据正四棱锥的几何性质列出等量关系，进而即可求解.

【详解】设正四棱锥的高为h，底面边长为a，侧面三角形底边上的高为h'，则

由题意可知，$\begin{cases}h^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ah'\\h^2=h'^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\end{cases}$，

因此有

$h^2=h'^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=ah'$，即$\left(\frac{h'}{a}\right)^2-\frac{h'}{a}-\frac{1}{4}=0$，解得$\frac{h'}{a}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$，

因为$\frac{h'}{a}>0$，

所以$\frac{h'}{a}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

所以侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

故选：D.

9．D

【分析】求出分段函数的解析式以及各段导函数，得出函数的单调区间，即可得出①；作出函数图象，即可判断②；根据①求得的导函数，可推得$\forall x\in\mathbf{R}$，有$f'(x)\geq -1$恒成立，即可得出③；作图，根据图象得出$y=f(x)$与$y=m$有3个交点时，m的范围.然后用m表示出x_1,x_2,x_3，即可得出$(1-x_1)(x_2+x_3)=\mathrm{e}^m\left(m+\frac{1}{m}\right)$，构造函数$g(m)=\mathrm{e}^m\left(m+\frac{1}{m}\right)$，通过导函数研究函数的单调性，得出函数的最值，即可判断④.

【详解】对于①，当$0<x<1$时，$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{-\ln x}}=\mathrm{e}^{\ln x}=x$，$f'(x)=1>0$恒成立，

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当$x\geq 1$时，$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}}=\frac{1}{x}$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$恒成立，

所以，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减；

当$x\leq 0$时，$f(x)=\ln(1-x)$，$f'(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}<0$恒成立，

所以，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

综上所述，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

所以，$f(x)$在$x=0$处取得极小值$f(0)=0$，在$x=1$处取得极大值$f(1)=1$，故①正确；

对于②，作出$f(x)$的图象如下图1

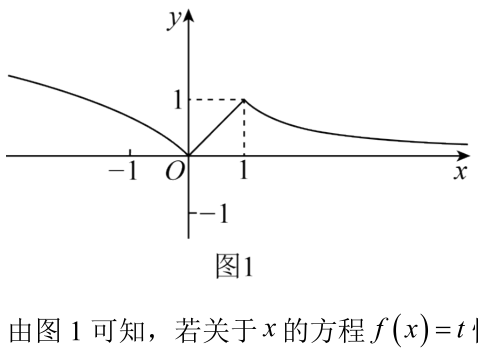


图1

由图1可知，若关于x的方程$f(x)=t$恰有1个解，则$t>1$或$t=0$，故②错误；

对于③，由①知，当$x\ge 1$时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，

因为$x\ge 1$，所以$x^2\ge 1$，所以$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ge -1$，当且仅当$f'(1)=-1$；

当$0<x<1$时，$f'(x)=1$；

当$x\le 0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$，

因为$x\le 0$，所以$x-1\le -1$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\ge -1$，当且仅当$f'(0)=-1$.

综上所述，$\forall x\in \mathbf{R}$，有$f'(x)\ge -1$恒成立.

又直线$x+y+c=0$可化为$y=-x-c$，斜率为-1，

所以函数$f(x)$的图象与直线$x+y+c=0$（$c\in \mathrm{R}$）有且仅有一个交点，故③正确；

对于④，

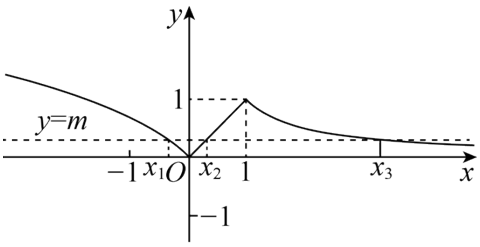


图2

由图 2 可知，当$0<m<1$时，函数$f(x)$的图象与$y=m$有 3 个不同的交点.

则有$\begin{cases}\ln(1-x_1)=m\\ x_2=m\\ \dfrac{1}{x_3}=m\end{cases}$，所以$\begin{cases}x_2=m\\ 1-x_1=\mathrm{e}^m\\ x_3=\dfrac{1}{m}\end{cases}$，

所以$(1-x_1)(x_2+x_3)=\mathrm{e}^m\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$，$0<m<1$.

令$g(m)=\mathrm{e}^m\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$，$0<m<1$，

则$g'(m)=\mathrm{e}^m\left(m+\dfrac{1}{m}+1-\dfrac{1}{m^2}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^m}{m^2}\left(m^3+m^2+m-1\right)$.

令$h(m)=m^3+m^2+m-1$，则$h'(m)=3m^2+2m+1>0$在$(0,1)$上恒成立，

所以，$h(m)$在$(0,1)$上单调递增.

又$h(0)=-1<0$，$h(1)=2>0$，