长春市第十一中学2023-2024学年高三第一次模拟考试数学试题B卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过点F的直线l与抛物线C交于A，B两点（设点A位于第一象限），过点A，B分别作抛物线C的准线的垂线，垂足分别为点A_1，B_1，抛物线C的准线交x轴于点K，若$\dfrac{|A_1K|}{|B_1K|}=2$，则直线l的斜率为

A． 1　　**B．** $\sqrt{2}$　　**C．** $2\sqrt{2}$　　**D．** $\sqrt{3}$

2．$F\left(-c,0\right)$为双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左焦点，过点$F$的直线与圆$x^2+y^2=\dfrac{3}{4}c^2$交于$A$、$B$两点，（$A$在$F$、$B$之间）与双曲线$E$在第一象限的交点为$P$，$O$为坐标原点，若$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BP}$，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{100}c^2$，则双曲线$E$的离心率为（　　）

A． $\sqrt{5}$　　**B．** $\dfrac{5}{2}$　　**C．** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　**D．** 5

3．泰山有“五岳之首”“天下第一山”之称，登泰山的路线有四条：红门盘道徒步线路，桃花峪登山线路，天外村汽车登山线路，天烛峰登山线路.甲、乙、丙三人在聊起自己登泰山的线路时，发现三人走的线路均不同，且均没有走天外村汽车登山线路，三人向其他旅友进行如下陈述：

甲：我走红门盘道徒步线路，乙走桃花峪登山线路；

乙：甲走桃花峪登山线路，丙走红门盘道徒步线路；

丙：甲走天烛峰登山线路，乙走红门盘道徒步线路；

事实上，甲、乙、丙三人的陈述都只对一半，根据以上信息，可判断下面说法正确的是（　　）

A． 甲走桃花峪登山线路　　**B．** 乙走红门盘道徒步线路

C． 丙走桃花峪登山线路　　**D．** 甲走天烛峰登山线路

4．已知实数$a>0$，$a\ne1$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}a^x,x<1\\x^2+\dfrac{4}{x}+a\ln x,x\ge1\end{cases}$在$R$上单调递增，则实数$a$的取值范围是（　　）

A． $1<a\le2$　　**B．** $a<5$　　**C．** $3<a<5$　　**D．** $2\le a\le5$

5．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{a}{x}+a$ 在 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$ 上有两个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A． $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},-1\right]$　　**B．** $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},1\right)$　　**C．** $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},-1\right)$　　**D．** $\left[-1,\mathrm{e}\right)$

6．已知 m,n 为两条不重合直线，α,β 为两个不重合平面，下列条件中，$\alpha\perp\beta$ 的充分条件是（　　）

A． $m\parallel n,m\subset\alpha,n\subset\beta$　　**B．** $m\parallel n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

C． $m\perp n,m\parallel\alpha,n\parallel\beta$　　**D．** $m\perp n,m\perp\alpha,n\perp\beta$

7．已知 $(1+\lambda x)^n$ 展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等，$(1+\lambda x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_1+a_2+\cdots a_n=242$，则 $a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^na_n$ 的值为(　　)

A．1　　**B．－1**　　**C．8l**　　**D．－81**

8．已知函数 $f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$，$g\left(x\right)=x+e^x$，$h\left(x\right)=x+\ln x\left(x>0\right)$ 的零点分别为 x_1，x_2，x_3，则（　　）

A． $x_1<x_2<x_3$　　**B．** $x_2<x_1<x_3$

C． $x_2<x_3<x_1$　　**D．** $x_3<x_1<x_2$

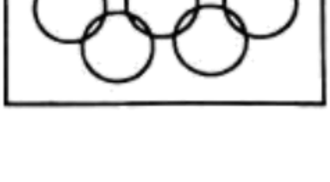
9．过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左焦点 F 的直线过 C 的上顶点 B，且与椭圆 C 相交于另一点 A，点 A 在 y 轴上的射影为 A'，若 $\dfrac{|FO|}{|AA'|}=\dfrac{3}{4}$，$O$ 是坐标原点，则椭圆 C 的离心率为（　　）

A． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**B．** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　**C．** $\dfrac{1}{2}$　　**D．** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10．已知集合 $M=\{y\mid -1<y<3\}$，$N=\{x\mid x(2x-7)\leqslant 0\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A． $[0,3)$　　**B．** $\left(0,\dfrac{7}{2}\right]$　　**C．** $\left(-1,\dfrac{7}{2}\right]$　　**D．** $\varnothing$

11．第 24 届冬奥会将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在北京市和张家口市举行，为了解奥运会会旗中五环所占面积与单独五个环面积之和的比值 *P*，某学生做如图所示的模拟实验：通过计算机模拟在长为 10，宽为 6 的长方形奥运会旗内随机取 *N* 个点，经统计落入五环内部及其边界上的点数为 *n* 个，已知圆环半径为 1，则比值 *P* 的近似值为(　　)



A．$\frac{\pi n}{8N}$　　B．$\frac{12n}{\pi N}$　　C．$\frac{8n}{\pi N}$　　D．$\frac{\pi n}{12N}$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, x\le 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$，若 $f(a)>f(b)$，则下列不等关系正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a^2+1}<\frac{1}{b^2+1}$　　B．$\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$

C．$a^2<ab$　　D．$\ln\left(a^2+1\right)>\ln\left(b^2+1\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=(x^2+1)e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为__．

14．函数 $f\left(x\right)=e^x-e^{1-x}-b\left|2x-1\right|$ 在 $\left(0,1\right)$ 内有两个零点，则实数 b 的取值范围是________．

15．$(x+2y)(x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数为______________．

16．已知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\le 0,\\ 2x+y-4\le 0,\\ y\le 2x,\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最小值为__________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 u（x）＝xlnx，v（x）$=\frac{1}{2}mx^2+x-1$，m∈R．

（1）令 m＝2，求函数 h（x）$=\frac{u(x)}{v(x)-x+1}$ 的单调区间；

（2）令 f（x）＝u（x）﹣ v（x），若函数 f（x）恰有两个极值点 x_1，x_2，且满足 $1<\frac{x_2}{x_1}\le e$（e 为自然对数的底数）求 $x_1\bullet x_2$ 的最大值．

18．（12 分）已知中心在原点 O 的椭圆 C 的左焦点为 $F_1\left(-1,0\right)$，C 与 y 轴正半轴交点为 A，且 $\angle AF_1O=\frac{\pi}{3}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 A 作斜率为 k_1、$k_2\left(k_1k_2\ne 0\right)$ 的两条直线分别交 C 于异于点 A 的两点 M、N．证明：当 $k_2=\frac{k_1}{k_1-1}$ 时，直线 MN 过定点．

19．（12 分）已知函数 $f(x)=ax^2+ax+1-e^{2x}$．

（1）若函数 $g(x)=f'(x)$，试讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)<0$，求 a 的取值范围．

20．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x-\dfrac{be^{x}}{x}$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $2x-y-2-e=0$．

（1）求 a，b 的值；

（2）证明函数 $f\left(x\right)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $f\left(x_0\right)<2\ln 2-2$．

21．（12 分）已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$2S_n+a_n=1\left(n\in N^*\right)$．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{1-a_{n+1}}$，$T_n$ 为数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和.求证：$T_n>2n-\dfrac{1}{3}$．

22．（10 分）对于非负整数集合 S（非空），若对任意 $x,y\in S$，或者 $x+y\in S$，或者 $\left|x-y\right|\in S$，则称 S 为一个好集合．以下记 $\left|S\right|$ 为 S 的元素个数．

（1）给出所有的元素均小于 3 的好集合.（给出结论即可）

（2）求出所有满足 $\left|S\right|=4$ 的好集合.（同时说明理由）

（3）若好集合 S 满足 $\left|S\right|=2019$，求证：S 中存在元素 m，使得 S 中所有元素均为 m 的整数倍．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

根据抛物线定义，可得 $|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$，

又 $AA_1//FK//BB_1$，所以 $\dfrac{|A_1K|}{|B_1K|}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=2$，所以 $\dfrac{|A_1K|}{|B_1K|}=\dfrac{|AA_1|}{|BB_1|}=2$，

设 $|BB_1|=m(m>0)$，则 $|AA_1|=2m$，则 $\cos\angle AFx=\cos\angle BAA_1=\dfrac{|AA_1|-|BB_1|}{|AB|}=\dfrac{2m-m}{2m+m}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\sin\angle AFx=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以直线 l 的斜率 $k=\tan\angle AFx=2\sqrt{2}$．故选 **C**．

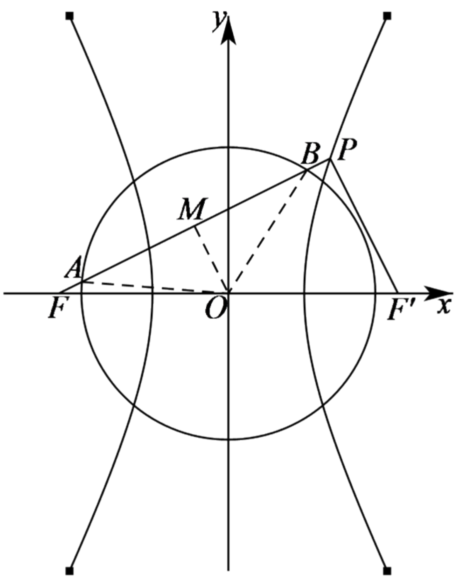
2、**D**

【解析】

过点O作$OM\perp PF$，可得出点M为AB的中点，由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{100}c^2$可求得$\cos\angle AOB$的值，可计算出$\cos\dfrac{\angle AOB}{2}$的值，进而可得出$|OM|$，结合$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BP}$可知点$M$为$PF$的中点，可得出$|PF'|$，利用勾股定理求得$|PF|$（$F'$为双曲线的右焦点），再利用双曲线的定义可求得该双曲线的离心率的值.

【详解】

如下图所示，过点O作$OM\perp PF$，设该双曲线的右焦点为F'，连接PF'.



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\cdot\cos\angle AOB=-\dfrac{3}{100}c^2$，$\therefore\cos\angle AOB=-\dfrac{1}{25}$.

$\therefore\cos\dfrac{\angle AOB}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\angle AOB}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，　$\therefore|OM|=|OA|\cos\dfrac{\angle AOB}{2}=\dfrac{3}{5}c$，

$\because\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BP}$，$\therefore M$为$PF$的中点，$\therefore PF'//OM$，$\angle FPF'=90°$，$|PF'|=2|OM|=\dfrac{6c}{5}$，

$\therefore|PF|=\sqrt{(2c)^2-|PF'|^2}=\dfrac{8c}{5}$，

由双曲线的定义得$|PF|-|PF'|=2a$，即$\dfrac{2c}{5}=2a$，

因此，该双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=5$.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查双曲线离心率的求解，解题时要充分分析图形的形状，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

3、**D**

【解析】

甲乙丙三人陈述中都提到了甲的路线,由题意知这三句中一定有一个是正确另外两个错误的,再分情况讨论即可.

【详解】

若甲走的红门盘道徒步线路,则乙,丙描述中的甲的去向均错误,又三人的陈述都只对一半,则乙丙的另外两句话"丙走红门盘道徒步线路","乙走红门盘道徒步线路"正确,与"三人走的线路均不同"矛盾.

故甲的另一句"乙走桃花峪登山线路"正确,故丙的"乙走红门盘道徒步线路"错误,"甲走天烛峰登山线路"正确.乙的话中"甲走桃花峪登山线路"错误,"丙走红门盘道徒步线路"正确.

综上所述,甲走天烛峰登山线路,乙走桃花峪登山线路, 丙走红门盘道徒步线路

故选：D

【点睛】

本题主要考查了判断与推理的问题,重点是找到三人中都提到的内容进行分类讨论,属于基础题型.

4、D

【解析】

根据题意，对于函数分 2 段分析：当 $x<1, f(x)=a^x$，由指数函数的性质分析可得 $a>1$①，当 $x\geq 1, f(x)=x^2+\frac{4}{x}+a\ln x$，由导数与函数单调性的关系可得 $f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}\geq 0$，在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，变形可得 $a\geq 2$②，再结合函数的单调性，分析可得 $a\leq 1+4$③，联立三个式子，分析可得答案.

【详解】

解：根据题意，函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} a^x, x<1 \\ x^2+\frac{4}{x}+a\ln x, x\geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，

当 $x<1, f(x)=a^x$，若 $f\left(x\right)$ 为增函数，则 $a>1$①，

当 $x\geq 1, f(x)=x^2+\frac{4}{x}+a\ln x$，

若 $f\left(x\right)$ 为增函数，必有 $f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

变形可得：$a\geq\frac{4}{x}-2x^2$，

又由 $x\geq 1$，可得 $g\left(x\right)=\frac{4}{x}-2x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，则 $\frac{4}{x}-2x^2\leq\frac{4}{1}-2=2$，

若 $a\geq\frac{4}{x}-2x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，则有 $a\geq 2$②，

若函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，左边一段函数的最大值不能大于右边一段函数的最小值，

则需有 $a\leq 1+4=5$，③

联立①②③可得：$2 \le a \le 5$

.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查函数单调性的性质以及应用，注意分段函数单调性的性质.

5、**C**

【解析】

对函数求导，对 **a** 分类讨论，分别求得函数 $f\left(x\right)$ 的单调性及极值，结合端点处的函数值进行判断求解.

【详解】

$\because f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x+a}{x^2}$，$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$.

当 $a\geq -1$ 时，$f'\left(x\right)\geq 0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递增，不合题意.

当 $a\leq -e$ 时，$f'\left(x\right)\leq 0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递减，也不合题意.

当 $-e<a<-1$ 时，则 $x\in\left[1,-a\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,-a\right)$ 上单调递减，$x\in\left(-a,\mathrm{e}\right]$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-a,e\right]$ 上单调递增，又 $f\left(1\right)=0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$ 上有两个零点，只需 $f\left(e\right)=1-\dfrac{a}{e}+a\geq 0$ 即可，解得 $\dfrac{e}{1-e}\leq a<-1$.

综上，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},-1\right)$.

故选 **C.**

【点睛】

本题考查了利用导数解决函数零点的问题，考查了函数的单调性及极值问题，属于中档题.

6、**D**

【解析】

根据面面垂直的判定定理，对选项中的命题进行分析、判断正误即可.

【详解】

对于 **A**，当 $m//n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$ 时，则平面 α 与平面 β 可能相交，$\alpha\perp\beta$，$\alpha//\beta$，故不能作为 $\alpha\perp\beta$ 的充分条件，故 **A** 错误；

对于 **B**，当 $m//n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$ 时，则 $\alpha//\beta$，故不能作为 $\alpha\perp\beta$ 的充分条件，故 **B** 错误；

对于 **C**，当 $m\perp n$，$m//\alpha$，$n//\beta$ 时，则平面 α 与平面 β 相交，$\alpha\perp\beta$，$\alpha//\beta$，故不能作为 $\alpha\perp\beta$ 的充分条件，故 **C** 错误；

对于 **D**，当 $m \perp n$，$m \perp \alpha$，$n \perp \beta$，则一定能得到 $\alpha \perp \beta$，故 **D** 正确.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查了面面垂直的判断问题，属于基础题.

7、**B**

【解析】

根据二项式系数的性质，可求得 n，再通过赋值求得 a_0 以及结果即可.

【详解】

因为 $(1+\lambda x)^n$ 展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等，

故可得 $n=5$，

令 $x=0$，故可得 $1=a_0$，

又因为 $a_1+a_2+\cdots+a_5=242$，

令 $x=1$，则 $\left(1+\lambda\right)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=243$，

解得 $\lambda=2$

令 $x=-1$，则 $\left(1-2\right)^5=a_0-a_1+a_2-\cdots+\left(-1\right)^5 a_5=-1$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查二项式系数的性质，以及通过赋值法求系数之和，属综合基础题.

8、**C**

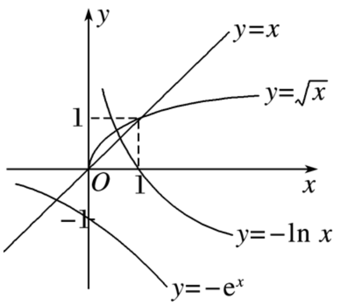
【解析】

转化函数 $f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$，$g\left(x\right)=x+e^x$，$h\left(x\right)=x+\ln x\left(x>0\right)$ 的零点为 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$，$y=-e^x$，$y=-\ln x\left(x>0\right)$ 的交点，数形结合，即得解.

【详解】

函数 $f(x)=x-\sqrt{x}(x>0)$，$g\left(x\right)=x+e^x$，$h\left(x\right)=x+\ln x\left(x>0\right)$ 的零点，即为 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$，$y=-e^x$，$y=-\ln x\left(x>0\right)$ 的交点，

作出 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}(x>0)$，$y=-e^x$，$y=-\ln x\left(x>0\right)$ 的图象，



如图所示，可知 $x_2 < x_3 < x_1$

故选：**C**

【点睛】

本题考查了数形结合法研究函数的零点，考查了学生转化划归，数形结合的能力，属于中档题.

9、**D**

【解析】

求得点 B 的坐标，由 $\frac{|FO|}{|AA'|}=\frac{3}{4}$，得出 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FA}$，利用向量的坐标运算得出点 A 的坐标，代入椭圆 C 的方程，可得出关于 a、b、c 的齐次等式，进而可求得椭圆 C 的离心率.

【详解】

由题意可得 $B\left(0,b\right)$、$F\left(-c,0\right)$.

由 $\frac{|FO|}{|AA'|}=\frac{3}{4}$，得 $\frac{|BF|}{|BA|}=\frac{3}{4}$，则 $\frac{|BF|}{|FA|}=\frac{3}{1}$，即 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FA}$.

而 $\overrightarrow{BF}=\left(-c,-b\right)$，所以 $\overrightarrow{FA}=\left(-\frac{c}{3},-\frac{b}{3}\right)$，所以点 $A\left(-\frac{4}{3}c,-\frac{b}{3}\right)$.

因为点 $A\left(-\frac{4}{3}c,-\frac{b}{3}\right)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，则 $\frac{\left(-\frac{4}{3}c\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{b}{3}\right)^2}{b^2}=1$，

整理可得 $\frac{16}{9}\cdot\frac{c^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

即椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：**D.**

【点睛】

本题考查椭圆离心率的求解，解答的关键就是要得出 a、b、c 的齐次等式，充分利用点 A