微积分题型总结

微积分题型总结

第一部分　函 数

函数是整个高等数学研究的主要对象，因而成为考核的对象之一。特别是一元函数的定义和性质，其中包括反函数、复合函数、隐函数、初等函数和分段函数的定义和性质。

一、　重点内容提要

1、函数定义中的关键要素是定义域与对应法则，这里要特别注意两点：

①两个函数只有当它们的定义域和对应法则都相同时，才能说它们是相同的函数。

②分段函数是一个函数而不是几个函数。

求函数的定义域：（答案只要求写成不等式的形式，可不用区间表示）

对于用数学式子来表示的函数，它的定义域就是使这个式子有意义的自变量 x 的取值范围（集合）

主要根据：

①分式函数：分母≠0

②偶次根式函数：被开方式≥0

③对数函数式：真数式＞0

④反正（余）弦函数式：自变量 $|x| \square 1$

例1　求函数 $y \square \sqrt{x \square \sqrt{x}}$ 的定义域。

例2　求函数 $\dfrac{\ln(x \square 2y)}{\sqrt{4 \square x^2 \square y^2}}$ 的定义域。

例3　$y = \sqrt{\dfrac{2 \square x}{1-2x}}$ 的定义域

例 4 $y=\ln(x^2-3x)+\arccos x$

在上述的函数解析式中，上述情况有几种就列出几个不等式组成不等式组解之。

2、关于反函数定义，我们仅要求掌握变量反解法。

3、函数的简单性质，重点掌握奇偶性、单调性。

4、关于复合函数定义

将复合函数拆成基本初等函数或基本初等函数经四则运算形成的函数，这在求导和积分类型题中是不可避免的。

指出 $y=\sin e^{\arctan\frac{1}{x}}$ 的复合过程

5、隐函数：主要在后面求导数及应用中用到

6、注意初等函数的定义。注意分段函数不是初等函数。

二、典型例题

类型题 1、求函数定义域

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数表达式有意义，x 要满足：

$$\begin{cases} 4-x\geq 0 \\ x-1>0 \\ \lg(x-1)\neq 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x\leq 4 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

所以函数的定义域为（1，2）$\cup$（2，4］.

例 2 求函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leq x\leq 1 \\ -1, & 1<x\leq 2 \end{cases}$ 的定义域.

解 函数 f(x)的定义域是[0，2].

小结：注意，对于分段函数，它的定义域为所有分段区间的并集。

如： (1) 函数 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是＿＿＿＿＿＿＿＿；

(2) 函数 $y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 定义域是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) 函数 $f(x)=\log_2(2x-1)$+arcsin(1-x) 的定义域＿＿＿＿＿＿＿＿

类型题 2、函数值与函数记号

例 设 f(x)= $\frac{1}{x+1}$ ，求（1）f(x-1)；（2）$f\left(\frac{1}{x}\right)$；（3）$f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 （1）f(x-1)= $\frac{1}{(x-1)+1}=\frac{1}{x}$

（2）$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x+1}$

（3）$f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x+1}{2x+1}$

第二部分 极限与连续

作为高等数学研究的基本工具，求函数极限和讨论函数的连续性乃是考核的基本类型题，要引起注意。

一、 重点内容提要

1、函数极限的求法，注意单侧极限与极限存在的充要条件。

2、知道极限的四则运算法则

3、熟练掌握两个重要极限

4、关于无穷小量

（1）掌握无穷小量的定义，要特别注意极限过程不

可缺少。

（2）掌握其性质与关系

无穷小量的判定也是一个比较重要的问题

例：$x \to 0$,下列那些量是无穷小量

$\frac{\tan x}{x}, x\cos x, x^3, x\sin x, \frac{\sin x}{x}, x\sin\frac{1}{x}$

5、掌握函数的连续性定义与间断点的求法

（1）掌握函数的连续性定义

（2）掌握间断点定义

（3）掌握并会用单侧连续性

（4）掌握初等函数的连续性的结论

6、掌握闭区间上连续函数的性质

（1）理解最大值和最小值定理，即在闭区间上连续的函数，必能在其上取到最大值和最小值。本定理主要为求函数的最值做必要的铺垫。

（2）掌握介值定理的推论--零点定理。本定理主要用于判定一个方程根的存在性。

二、典型例题

求函数极限常用方法有：利用极限的四则运算法则求极限，利用初等函数的连续性求极限；利用两个重要极限求极限；利用洛必达法则求极限等。

类型题 1、利用极限的四则运算法则及初等函数连续性求极限

例 1 $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$
$$= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0)$$

例 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$

例 3 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)} & q(x_0)\neq 0\\ \dfrac{0}{0}\ \text{(洛比达法则)} & p(x_0)=q(x_0)=0\\ \infty & p(x_0)\neq 0;\ q(x_0)=0\end{cases}$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

解 注意到 $x\to 1$ 使分子和分母都为零，可通过约去公共零因子的方法解决，我们有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x+1}=0$$

注：约去零因子后，$x=1$ 成为连续点，便可以利用初等函数的连续性求极限了。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

解 同上题，设法分离出零因子，然后消去。有

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left[(\sqrt{2x+1})^2-3^2\right](\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\left[(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{2})^2\right](\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3+3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

类型题 2、利用两个重要极限求极限

重要极限一及其推广形式

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ，推广形式 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

注意比较以下四个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x=1$

例 2 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\overset{令t=3x}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot 3=1\cdot 3=3$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin 3x=0$（因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，而 $\sin 3x$ 是有界函数）

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{令t=1/x}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

重要极限二 及其推广形式

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$ 令 $u=2/x$ $=\lim\limits_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{2}=e^{2}$

例 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=0$

(07.二. 6) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\square 1}{x\square 1}\right)^{x}=\square$

类型题 3、利用无穷小量的性质求极限

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

例2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\sin x=1\cdot 0=0$

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

类型题 4、利用洛必塔法则求极限

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{1}=0$

例2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{1+x^2}{x^2}=1$

例3 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$ $\quad$ 例4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ $\quad$ 例5 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

例6

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x 2t^2\,dt}{\int_0^x t(1+\sin t)\,dt}$

类型题 5、判断函数在指定点的连续性（连续的定义要明确）

例 1 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(\sin\frac{x}{2})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=-\dfrac{1}{2}$.

又因为 $f(0)=-\frac{1}{2}$，所以函数 f(x) 在 x=0 处连续.

(07.二. 7) 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-3}$，要使 $f(x)$ 在 x=3 处连续，应补充定义 f(3)=________

函数在某一点是否有定义、是否有极限、是否连续、可导、可微之间的关系

小结

判断分段函数在分界点处是否连续，首先要判断函数在该点处的极限是否存在，然后考察 f(x) 在该点的极限值是否等于函数在该点处的函数值，若相等，则函数在分界点处连续，否则就不连续。

类型题 6、求函数的连续区间

例　求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的连续区间。

解 因为 f(x) 的定义域为 $x^2-3x+2\neq 0$，即 $(x-1)(x-2)\neq 0$ 得 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$。

所以函数 f(x) 的连续区间是 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

小结

由于一切初等函数在其定义域内都连续，因此要求初等函数的连续区间也就是求它的定义域。

类型题 7、求函数间断点。

例 1　求函数 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ 的间断点。

解 对于有理分式函数，使分母为零的点是它的不连

续点。

使$(x+2)^2=0$ 的点为 $x=—2$，

$x=—2$ 是函数 $f(x)$的间断点。

例 1　求函数 $f(x)=\frac{(x\square2)(x\square1)}{(x\square2)(x\square3)}$的间断点。

解 对于有理分式函数，使分母为零的点是它的不连续点。

使（x-2）(x-3)=0 的点为 $x=2$，$x=3$

□ $x=2$，$x=3$ 是函数 $f(x)$的间断点。

类型题 8、判定方程根的存在性

例 1 证明：方程$x^5\square4x\square1\square0$至少存在一个实根。

证：设$f(x)\square x^5\square4x\square1$，则函数$f(x)$是定义在整个数轴上的初等函数，故在区间$[0,1]$上连续，且有$f(0)\square f(1)\square(\square1)\square(4)\square0$,’由零点定理知，至少存在一个点$x\square c\square(0,1)$,使得$f(c)\square0$,或$c^5\square4c\square1\square0$,即方程$x^5\square4x\square1\square0$至少存在一个实根$x\square c$.

小结：这类证明题一般都是先行设一个函数，这个函数通常是将给定方程的非零项移至方程的一侧所形成的。然后通过方程观察使函数值异号的两个不同点，这两个点做端点就可以形成一个区间。如果所设函数在此区间上连续，问题便转化为利用零点定理的证明问题了。当然，本题的区间可以不取 0、1 而取 0 和 0.5、0 和 2 等做端点，同样可以证明之。取 0 和 1 只是因为计算简单罢了。

导数与微分

积分）考核的主要内容，应该做到十分熟练。其考核比例为 30% 。

一、重点内容提要

1、掌握导数的定义和几何意义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x}{}$$

2、熟练掌握求导方法

（1）熟练基本初等函数的导数公式（按照所给的规律性成对记忆）

（2）掌握导数的四则运算法则

（3）熟练掌握复合函数的求导法则

（4）掌握隐函数的求导法则

（5）熟练掌握高阶导数的求法（以二阶导数为主）

二、典型例题

类型题 1、求显函数的导数

例 1 求函数 $y=x^3+\sqrt[3]{x}-\cos x+\arctan x+\ln 2$，求 y' 的导数；

解 利用基本求导公式和四则运算法则，

$$y'=3x^2+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\sin x+\frac{1}{1+x^2}$$

例 2 设 $y=e^{-3x}+\ln(2x^3+1)$，求 y'.

解 先利用四则运算法则有

$$y'=(e^{-3x})'+\left(\ln(2x^3+1)\right)'$$

再分别使用复合函数求导法则，即得

$$= -3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}\cdot 6x^2$$

$$= -3e^{-3x}+\frac{6x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

例 3 $y=\sin e^{\arctan\sqrt{\frac{1}{x}}}$ 求 y'

类型题 2、隐函数求导方法

例 1 求由方程 $x^2-xy+y^2=7$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在点 $(2,-1)$ 处的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解 方程两边对 x 求导有：$2x-(y+xy')+2yy'=0$

解得 $y'=\frac{y-2x}{2y-x}$，于是有

$$y'\Big|_{(2,-1)}=\frac{y-2x}{2y-x}\Big|_{(2,-1)}=\frac{5}{4}$$

类型题 4、取对数求导法

例 1 $y=x^x+x^a+a^x+a^a \quad (a>0)$ 求 y'

例 2 $y=x^{\sin x}$ 求 y'

例 3 $y=\frac{(x\square 2)}{x\square 4}\sqrt{\frac{(x\square 5)^3}{(x\square 7)}}$ 求 y'

类型题 5、求函数的微分

补充：设 $\sqrt{x^2+1}+(arctgx)^2$，求 dy.

解：∵ $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x+2arctgx\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2arctgx}{1+x^2}$

∴ $dy=y'dx=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2arctgx}{1+x^2}\right)dx$

例 设 $y=xy+e^y$ 求 dy.

解 注意到函数 y 是由二元方程所确定，方程两边