第五章 动态规划

Dynamic Programming

5.1 动态规划数学模型

5.2 资源分配问题

5.3 生产与存储问题

5.4 背包问题

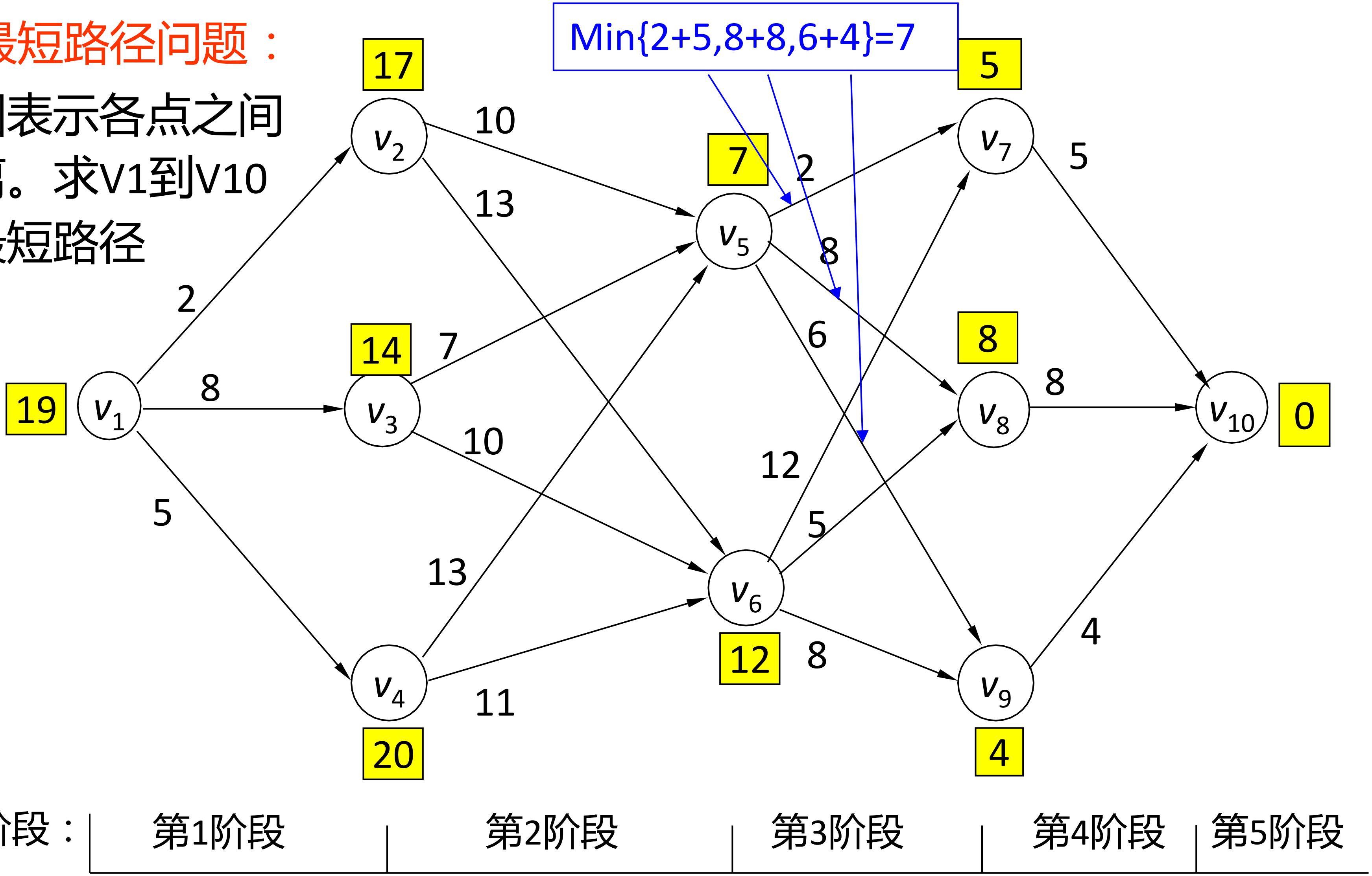
5.1 动态规划数学模型

Mathematical Model of DP

引例

■ 最短路径问题：

下图表示各点之间距离。求V1到V10的最短路径



动态规划概述

- 动态规划是运筹学的一个主要分支，是上个世纪50年代美国数学家贝尔曼（Richard. Bellman)提出。解决多阶段决策过程的最优化的一种方法
- 多阶段决策的最优化的目标：达到整个活动过程的总体效果最优
- 动态规划的运用
  - 最优路径问题
  - 资源分配问题
  - 排序问题
  - 投资问题
  - 装载问题
  - 生产计划与库存问题
  - 生产过程的最优控制等

■ 动态规划问题的**基本特征**

1. 问题具有**多阶段决策**的特征。阶段可以按时间划分，也可以按空间划分。

2. 每一阶段都有相应的“**状态**”与之对应。

3. **每一阶段都面临一个决策**，选择不同的决策将会导致下一阶段不同的状态，同时，不同的决策将会导致这一阶段不同的目标函数值。

4. **每一阶段的最优解问题可以递归地归结为下一阶段各个可能状态的最优解问题**，各子问题与原问题具有完全相同的结构。能否构造这样的递推归结，是解决动态规划问题的关键。这种递推归结的过程，称为“不变嵌入”。

5. **状态具有无后效性** 当某阶段状态确定后，此阶段以后过程的发展不受此阶段以前各阶段状态的影响。

5.1 动态规划数学模型

- 动态规划基本原理是将一个问题的最优解转化为求**子问题**的最优解，研究的对象是决策过程的最优化，其变量是流动的时间或变动的状态，最后到达整个系统最优。

- 思想：一方面说明原问题的最优解中包含了子问题的最优解，另一方面给出了一种求解问题的思路，将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同子问题，每一个子问题只解一次，并将结果保存起来以后直接引用，避免每次碰到时都要重复计算，以便各个击破，分而治之，即分治法，是一种解决最优化问题的算法策略。

- **动态规划求解可分为三个步骤**：**分解、求解与合并。**

■ 基本概念

（1）**阶段**(Stage)：表示决策顺序的时段序列，阶段可以按时间或空间划分，阶段数k可以是确定数、不定数或无限数

（2）**状态**（State）：描述决策过程当前特征并且具有无后效性的量。状态可以是数量，也可以是字符，数量状态可以是连续的，也可以是离散的。每一状态可以取不同值，状态变量记为s_k。各阶段所有状态组成的集合称为状态集。

（3）**决策**（Decision）x_k：从某一状态向下一状态过度时所做的选择。

决策变量记为x_k，x_k是所在状态s_k的函数。

在状态s_k下，允许采取决策的全体称为决策允许集合，记为$D_k(s_k)$。各阶段所有决策组成的集合称为决策集。

四川農業大學

(4) **策略**(Strategy)： $\mathbf{P_{1,n}(s_1)}$ 从第1阶段开始到最后阶段全过程的决策构成的序列称为策略，第*k*阶段到最后阶段的决策序列$\mathbf{P_{k,n}(s_k)}$称为k-子策略。

(5) **状态转移方程**(State transformation function)：某一状态以及该状态下的决策，与下一状态之间的函数关系，记为

$$s_{k+1}=T(s_k, x_k)$$

(6) **指标函数或收益函数**(Return function)：是衡量对决策过程进行控制的效果的数量指标，具体可以是收益、成本、距离等指标。分为k阶段指标函数、k子过程指标函数及最优指标函数。

- **k阶段指标函数**

从k阶段状态s_k出发，选择决策x_k所产生的第k阶段指标，称为k阶段指标函数, 记为$v_k(s_k, x_k)$。

- **过程指标函数**

从k阶段状态s_k出发，选择决策$x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$所产生的过程指标，称为k子过程指标函数或简称过程指标函数，记为

$V_k(s_k,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ 或 $V_{k,n}$， n为阶段数。

- **最优指标函数**

从k阶段状态s_k出发，对所有的子策略，最优的过程指标函数称为最优指标函数，记为$f_k(s_k)$，通常取V_k的最大值或最小值。

$$f_k(s_k) = \underset{d_k \subset D_k(s_k)}{opt} \{V_{k,n}(s_k, P_{k,n})\}$$

（Opt = optimization 表示“max”或“min”

5.1 动态规划数学模型

- 动态规划要求过程指标满足递推关系

$$V_k(s_k,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)=V_k[v(s_k,x_k),V_{k+1}(s_{k+1},x_{k+1},\cdots,x_n)] \qquad (5\text{-}1)$$

连和形式：

$$\begin{aligned} V_K &= V_K(s_k,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n) \\ &= v_k(s_k,x_k) + V_{k+1}(s_{k+1},x_{k+1},\cdots,x_n) \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} v_j(s_j,x_j)+V_n \end{aligned} \qquad (5\text{-}2)$$

最优指标函数是

$$f_k(s_k)=\underset{x_k\in D_k(s_k)}{Opt}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\},\quad k=1,2,\cdots,n \qquad (5\text{-}3)$$

5.1 动态规划数学模型

连乘形式(v_j≠0)：

$$
\begin{aligned}
V_K &= V_K(s_k, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \\
&= v_k(s_k, x_k) \cdot V_{k+1}(s_{k+1}, x_{k+1}, \cdots, x_n) \\
&= \prod_{j=k}^{n-1} v_j(s_j, x_j) \cdot V_n
\end{aligned}
\tag{5-4}
$$

最优指标函数是

$$
f_k(s_k) = \mathop{Opt}_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(s_k, d_k) \cdot f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{5-5}
$$

动态规划数学模型由式(5-3)或(5-5)、边界条件及状态转移方程构成。如连和形式的数学模型

$$
\begin{cases}
f_k(s_k) = \mathop{Opt}_{x_k \in D_k(s_k)} \{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 1,2,\cdots,n \\
f_n(s_n) = 0 \\
s_{k+1} = T(s_k, x_k)
\end{cases}
$$

5.1 动态规划数学模型

对于可加性指标函数，上式可以写为

$$f_k(s_k) = \underset{d_k \in D_k(s_k)}{opt}\{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \qquad k = 1,2,\cdots,n$$

对于可乘性指标函数，上式可以写为

$$f_k(s_k) = \underset{x_k \in D_k(s_k)}{opt}\{v_k(s_k, x_k) \times f_{k+1}(s_{k+1})\} \qquad k = 1,2,\cdots,n$$

上式称为动态规划最优指标的<u>递推方程</u>，是动态规划的基本方程。

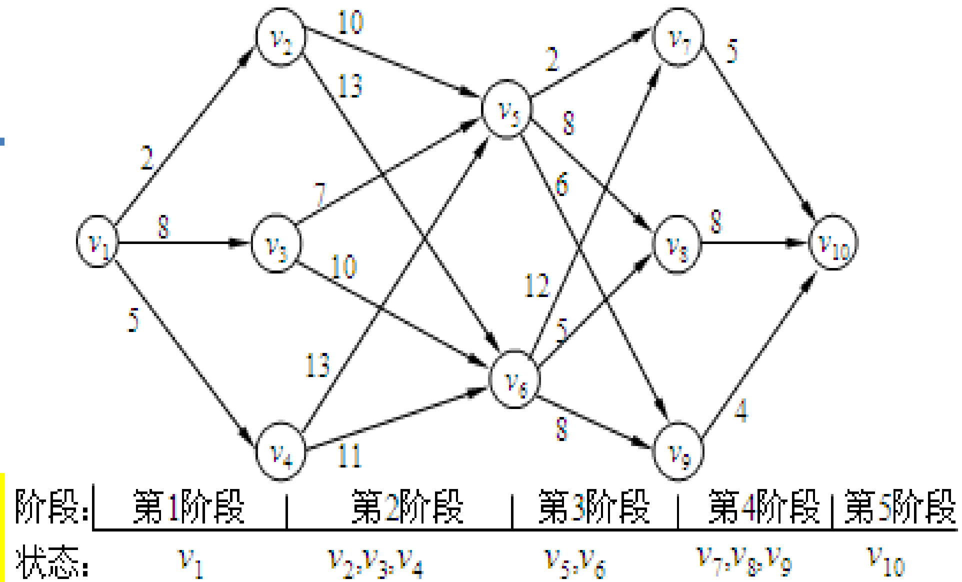
终端条件：为了使以上的递推方程有递推的起点，必须要设定最优指标的终端条件，即确定最后一个状态n下最优指标$f_n(s_n)$的值。

5.1 动态规划数学模型

■ 例1 用逆序法列表求引例

- $k=n=5$ 时，$f_5(v_{10}) = 0$
- $k=4$，递推方程为

$$f_4(s_4) = \min_{x_4 \in D_4(s_4)} \{v_4(s_4, x_4) + f_5(s_5)\}$$



s_4	$D_4(s_4)$	s_5	$v_4(s_4,x_4)$	$v_4(s_4,x_4)+f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$	最优决策x_4^*
v_7	$v_7 \to v_{10}$	v_{10}	5	$5+0=5^*$	5	$v_7 \to v_{10}$
v_8	$v_8 \to v_{10}$	v_{10}	8	$8+0=8^*$	8	$v_8 \to v_{10}$
v_9	$v_9 \to v_{10}$	v_{10}	4	$4+0=4^*$	4	$v_9 \to v_{10}$

四川农业大学

- k=3，递推方程为

$$f_3(s_3)=\min_{x_3\in D_3(s_3)}\{v_3(s_3,x_3)+f_4(s_4)\}$$

s_3	$D_3(s_3)$	s_4	$v_3(s_3,x_3)$	$v_3(s_3,x_3)+f_4(s_4)$	$f_3(s_3)$	最优决策x_3*
v_5	$v_5\to v_7$ $v_5\to v_8$ $v_5\to v_9$	v_7 v_8 v_9	2 8 6	2+5=7* 8+8=16 6+4=10	7	$v_5\to v_7$
v_6	$v_6\to v_7$ $v_6\to v_8$ $v_6\to v_9$	v_7 v_8 v_9	12 5 8	12+5=17 5+8=13 8+4=12*	12	$v_6\to v_9$

- k=2，递推方程为

$$f_2(s_2)=\min_{x_2\in D_2(s_2)}\{v_2(s_2,x_2)+f_3(s_3)\}$$

s_2	$D_2(s_2)$	s_3	$v_2(s_2,x_2)$	$v_2(s_2,x_2)+f_3(s_3)$	$f_2(s_2)$	最优决策 x_2^*
v_2	$v_2\to v_5$ $v_2\to v_6$	v_5 v_6	10 13	10+7=17* 13+12=25	17	$v_2\to v_5$
v_3	$v_3\to v_5$ $v_3\to v_6$	v_5 v_6	7 10	7+7=14* 10+12=22	14	$v_3\to v_5$
v_4	$v_4\to v_5$ $v_4\to v_6$	v_5 v_6	13 11	13+7=20* 11+12=23	20	$v_4\to v_5$

5.1 动态规划数学模型

- k=1，递推方程为

$$f_1(s_1) = \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{v_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)\}$$

s_1	$D_1(s_1)$	s_2	$v_1(s_1,x_1)$	$v_1(s_1,x_1)+f_2(s_2)$	$f_1(s_1)$	最优决策x_1*
v_1	$v_1 \to v_2$ $v_1 \to v_3$ $v_1 \to v_4$	v_2 v_3 v_4	2 8 5	2+17=19* 8+14=22 5+20=25	19	$v_1 \to v_2$

最优值是表中$f_1(s_1)$的值，从v_1到v_{10}的最短路长为19。最短路线从第一阶段回朔，查看最后一列最优决策，得到最短路径为：

$$v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_7 \to v_{10}$$

5.2 资源分配问题

Resource Assignment Problem

5.2 资源分配问题

四川農業大學

例2: 公司有资金8万元，投资A、B、C三个项目，一个投资单位为2万元。每个项目的投资效益率与投入该项目的资金有关。三个项目A、B、C的投资效益(万元)和投入资金（万元）的关系如下表。求对三个项目的最优投资分配，使总投资效益最大。

项目 / 投入资金	A	B	C
2万元	8	9	10
4万元	15	20	28
6万元	30	35	35
8万元	38	40	43

解: 设x_k为第k个项目的投资额，该问题的静态规划模型为

$$\max Z = v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_3(x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_j = 0, 2, 4, 6, 8 \end{cases}$$

5.2 资源分配问题

四川農業大學

阶段k：每投资一个项目作为一个阶段，k=1,2,3,4。k=4为虚设的阶段

状态变量s_k：投资第 k 个项目时拥有的资金数

决策变量x_k：第k个项目的投资额

决策允许集合：$0 \le x_k \le s_k$

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k - x_k$

阶段指标：$v_k(s_k，x_k)$ 见表中数据

递推方程： $f_k(x_k) = \max\{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}$

终端条件：$f_4(s_4)=0$

数学模型为

$$f_k(x_k) = \max\{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \quad k = 3,2,1$$

$$\begin{cases} s_{k+1} = s_k - x_k \\ f_4(x_4) = 0 \\ x_k = 0,2,4,6,8, k = 1,2,3 \end{cases}$$

k=4，终端条件$f_4(s_4)$=0。 k=3，$0 \le x_3 \le s_3$，$s_4=s_3-x_3$

四川農業大學

状态 s_3	决策 $x_3(s_3)$	状态转移方程 $s_4=s_3-x_3$	阶段指标 $v_3(s_3,x_3)$	过程指标 $v_3(s_3,x_3)+f_4(s_4)$	最优指标 $f_3(s_3)$	最优决策 x_3^*
0	0	0	0	0+0=0	0	0
2	0	2	0	0+0=0	10	2
	2	0	10	10+0=10*		
4	0	4	0	0+0=0	28	4
	2	2	10	10+0=10		
	4	0	28	28+0=28*		
6	0	6	0	0+0=0	35	6
	2	4	10	10+0=10		
	4	2	28	28+0=28		
	6	0	35	35+0=35*		
8	0	8	0	0+0=0	43	8
	2	6	10	10+0=10		
	4	4	28	28+0=28		
	6	2	35	35+0=35		
	8	0	43	43+0=43*		

$k=2$ ，$0 \le x_2 \le s_2$ ，$s_3=s_2 - x_2$

s_2	$x_2(s_2)$	s_3	$v_2(s_2,x_2)$	$f_3(s_3)$	$v_2(s_2,x_2)+f_3(s_3)$	$f_2(s_2)$	x_2^*
0	0	0	0	0	0+0=0	0	0
2	0	2	0	10	0+10=10*	10	0
	2	0	9	0	9+0=9		
4	0	4	0	28	0+28=28*	28	0
	2	2	9	10	9+10=19		
	4	0	20	0	20+0=20		
6	0	6	0	35	0+35=35	37	2
	2	4	9	28	9+28=37*		
	4	2	20	10	20+10=30		
	6	0	35	0	35+0=35		
8	0	8	0	43	0+43=43	48	4
	2	6	9	35	9+35=44		
	4	4	20	28	20+28=48*		
	6	2	35	10	35+10=45		
	8	0	40	0	40+0=40		