

第2课时 一元二次不等式根的分布及实际应用问题

1. 掌握一元二次方程根的分布问题.
2. 能运用不等式的知识和方法解决一些常见的实际问题.

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的符号

(1) 方程有两个异号根, 则

(2) 方程有两个同号根, 则

(3) 方程有两个正根, 则

(4) 方程有两个负根, 则

【做一做1】 关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有一个正根和一个负根,则实数 m 的取值范围是_____.

解析:由题意知 $\Delta = 1 + 4m > 0$, 解得 $m > 0$.
 $x_1 x_2 = -m < 0$,

答案: $(0, +\infty)$

2. 一元二次方程根的分布

设关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 对应的二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,结合二次函数的图像的开口方向、对称轴位置,以及区间端点函数值的正负,可以得到以下几类方程根的分布问题(此处 $\Delta=b^2-4ac$).

- (1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(k, +\infty)$ 内有两个实根的条件是 $\Delta \geq 0,$
 $-\frac{b}{2a} > k,$
 $f(k) > 0;$
- (2) 方程 $f(x)=0$ 有一根大于 k , 另一根小于 k 的条件是 _____;

(3) 方程 $f(x)=0$ 在区间 (k_1, k_2) 内有两个实根的条件是

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ k_1 < -\frac{b}{2a} < k_2, \\ f(k_1) > 0, \\ f(k_2) > 0; \end{cases}$$

对于非以上三种情况的根的分布问题,可以类比以上问题去找条件.

【做一做2】 若关于 x 的方程 $x^2-mx+3m=0$ 有一个大于1的根和一个小于1的根,则实数 m 的取值范围为_____.

解析: 设 $f(x)=x^2-mx+3m$, 则 $f(1)<0$, 即 $1-m+3m<0$, 解得 $m<-\frac{1}{2}$.

答案: $-\infty, -\frac{1}{2}$

题型一 讨论一元二次方程根的分布

【例1】 已知关于 x 的方程 $8x^2-(m-1)x+(m-7)=0$ 有两个实数根.

- (1) 当 m 为何值时,两根均为正数?
- (2) 当 m 为何值时,两根异号且负根的绝对值大于正根?
- (3) 当 m 为何值时,两根都大于1?
- (4) 当 m 为何值时,一根大于2,一根小于2?
- (5) 当 m 为何值时,两根在 $(0,2)$ 之间?

分析:关于二次方程根的讨论,结合二次函数图像和根与系数关系,列不等式组求解.

题型一

题型二

题型三

题型四

解: 设方程的两根为 x_1, x_2 .

$$\Delta \geq 0,$$

(1) $x_1 + x_2 > 0$, 解得 $7 < m \leq 9$ 或 $m \geq 25$.

$$x_1 \cdot x_2 > 0,$$

$$\Delta > 0,$$

(2) $x_1 + x_2 < 0$, 解得 $m < 1$.

$$x_1 \cdot x_2 < 0,$$

(3) 设 $f(x) = 8x^2 - (m-1)x + (m-7)$,

对应方程 $f(x) = 0$ 的两根 x_1, x_2 应满足 $x_1 > 1, x_2 > 1$.

$$f(1) > 0,$$

由图像(如图①所示)不难看出 $\Delta \geq 0$, 解得 $m \geq 25$.

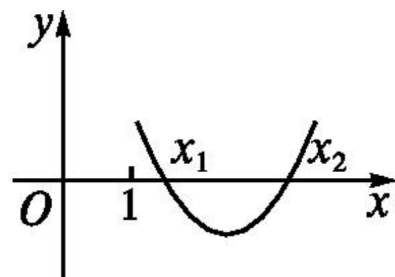
$$-\frac{b}{2a} > 1,$$

题型一

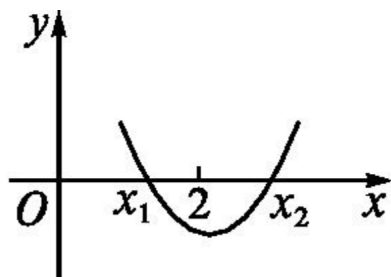
题型二

题型三

题型四



图①



图②

(4) 由 $f(x) = 8x^2 - (m-1)x + (m-7)$ 的图像(如图②所示)

不难看出 $\Delta > 0$,
 $f(2) < 0$, 解得 $m > 27$.

题型一

题型二

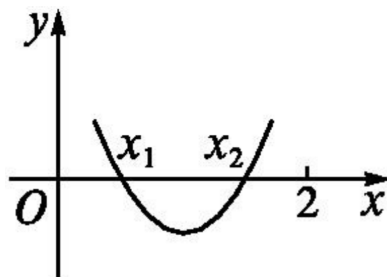
题型三

题型四

(5) 由 $f(x) = 8x^2 - (m-1)x + (m-7)$ 的图像(如图③所示)

不难看出
$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(0) > 0, \\ f(2) > 0, \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 2, \end{cases}$$

解得 $7 < m \leq 9$ 或 $25 \leq m < 27$.



图③

题型一

题型二

题型三

题型四

反思本题体现了三个“二次”,即二次函数、二次方程、二次不等式之间的联系,本题实质是考查二次方程根的分布问题.(1)(2)小题用代数的方法列出 x_1, x_2 所满足的关系, x_1, x_2 采用了设而不求的方法,最后用根与系数的关系求出 m 的取值范围;(3)(4)(5)小题利用二次函数的图像,可以比较迅速地得到 m 所满足的不等式组.一般来说,限制条件可从二次项系数的符号、判别式 Δ 的符号、对称轴的位置、端点处的函数值的符号等几方面来选择利用.

题型一

题型二

题型三

题型四

【变式训练1】 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2mx+2m+1=0$.若方程有两个根,其中一个根在区间 $(-1,0)$ 内,另一个根在区间 $(1,2)$ 内,求 m 的取值范围.

解: 设 $f(x)=x^2+2mx+2m+1$, 根据题意, 画出示意图, 由图分析可得,

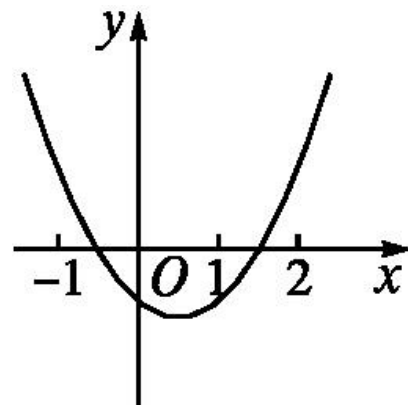
$$f(0) = 2m + 1 < 0,$$

$$m \text{ 满足不等式组 } \begin{cases} f(-1) = 2 > 0, \\ f(1) = 4m + 2 < 0, \end{cases}$$

$$f(2) = 6m + 5 > 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } m \text{ 的取值范围是 } -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}.$$



题型一

题型二

题型三

题型四

题型二 实际应用问题

【例2】 某企业生产一种机器的固定成本为0.5万元,但每生产100台时又需要可变成本0.25万元,市场对此种机器的年需求量为500台,销售收入函数为 $R(x)=5x-0.5x^2(0 \leq x \leq 5)$,其中 x 是产品售出的数量(单位:百台).

- (1)把利润表示为产量的函数;
- (2)年产量为多少时,企业所得的利润最大?
- (3)年产量为多少时,企业才不亏本?

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/407033022050010014>