2024年1月普通高等学校招生全国统一考试适应性测试（九省联考）

数学试题

注意事项：

]．答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 样本数据 16，24，14，10，20，30，12，14，40 的中位数为（　　）

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

2. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3+a_7=6$，$a_{12}=17$，则 $S_{16}=$（　　）

A. 120　　B. 140　　C. 160　　D. 180

4. 设 α,β 是两个平面，m,l 是两条直线，则下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $\alpha\perp\beta, m/\!/\alpha, l/\!/\beta$，则 $m\perp l$

B. 若 $m\subset\alpha, l\subset\beta, m/\!/l$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $\alpha\cap\beta=m, l/\!/\alpha, l/\!/\beta$，则 $m/\!/l$

D. 若 $m\perp\alpha, l\perp\beta, m/\!/l$，则 $\alpha\perp\beta$

5. 甲、乙、丙等 5 人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有 2 人，则不同排法共有（　　）

A. 20 种　　B. 16 种　　C. 12 种　　D. 8 种

6. 已知 Q 为直线 $l: x+2y+1=0$ 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记 P 的轨迹为 E，则（　　）

A. E 是一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆

B. E 是一条与 l 相交的直线

C. E 上的点到 l 的距离均为 $\sqrt{5}$

D. E 是两条平行直线

7. 已知 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\frac{1+\sin2\theta}{2\cos^2\theta+\sin2\theta}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\dfrac{3}{2}$

8. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过坐标原点的直线与 C 交于 A,B 两点，$\left|F_1B\right|=2\left|F_1A\right|,F_2A\cdot F_2B=4a^2$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

二、选择题：本题共 **3** 小题，每小题 **6** 分，共 **18** 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 **6** 分，部分选对的得部分分，有选错的得 **0** 分．

9. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$，则（　　）

A. 函数 $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数

B. 曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=k\pi,k\in Z$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

D. $f(x)$ 的最小值为 -2

10. 已知复数 z,w 均不为 0，则（　　）

A. $z^2=|z|^2$　　B. $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$　　D. $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$，若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则（　　）

A. $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 是偶函数　　D. 函数 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ 是减函数

三、填空题：本题共 **3** 小题，每小题 **5** 分，共 **15** 分．

12. 已知集合 $A=\{-2,0,2,4\},B=\{x||x-3|\le m\}$，若 $A\cap B=A$，则 m 的最小值为__________.

13. 已知轴截面为正三角形的圆锥 MM' 的高与球 O 的直径相等，则圆锥 MM' 的体积与球 O 的体积的比值

是__________，圆锥 MM' 的表面积与球 O 的表面积的比值是__________.

14. 以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数．设 $0<a<b<c<1$，已知 $b\ge 2a$ 或 $a+b\le 1$，则 $\max\{b-a, c-b, 1-c\}$ 的最小值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+ax+2$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直.

（1）求 a；

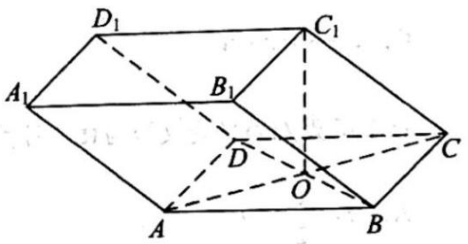
（2）求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

16. 盒中有标记数字 1，2，3，4 的小球各 2 个，随机一次取出 3 个小球.

（1）求取出的3 个小球上的数字两两不同的概率；

（2）记取出的 3 个小球上的最小数字为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17. 如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，$AA_1=2, \angle C_1CB=\angle C_1CD, \angle C_1CO=45^\circ$.



（1）证明：$C_1O\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $B-AA_1-D$ 的正弦值.

18. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D,E 两点，其中 B,D 在 x 轴上方，M,N 分别为 AB,DE 的中点.

（1）证明：直线 MN 过定点；

（2）设 G 为直线 AE 与直线 BD 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值.

19. 离散对数在密码学中有重要的应用．设 p 是素数，集合 $X=\{1,2,\dots,p-1\}$，若 $u,v\in X, m\in \mathbf{N}$，记 $u\otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数，$u^{m,\otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数；设 $a\in X$，$1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，若 $a^{n,\otimes}=b\left(n\in\{0,1,\cdots,p-2\}\right)$，则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数，记为 $n=\log(p)_a b$.

（1）若 $p=11,a=2$，求 $a^{p-1,\otimes}$；

（2）对 $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，记 $m_1\oplus m_2$ 为 m_1+m_2 除以 $p-1$ 的余数（当 m_1+m_2 能被 $p-1$ 整除时，$m_1\oplus m_2=0$）．证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$，其中 $b,c\in X$；

（3）已知 $n=\log(p)_a b$．对 $x\in X,k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，令 $y_1=a^{k,\otimes},y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$．证明：$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$．

2024年1月普通高等学校招生全国统一考试适应性测试（九省联考）

数学试题

注意事项：

]．答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 样本数据 16，24，14，10，20，30，12，14，40 的中位数为（　　）

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】由中位数定义即可得.

【详解】将这些数据从小到大排列可得：10，12，14，14，16，20，24，30，40，

则其中位数为 16.

故选：B.

2. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由椭圆的离心率公式即可求解.

【详解】由题意得 $e=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选：A.

3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_3+a_7=6, a_{12}=17$，则 $S_{16}=$（　　）

A. 120　　B. 140　　C. 160　　D. 180

【答案】C

【解析】

【分析】利用下标和性质先求出a_5+a_{12}的值，然后根据前n项和公式结合下标和性质求解出S_{16}的值.

【详解】因为$a_3+a_7=2a_5=6$，所以$a_5=3$，所以$a_5+a_{12}=3+17=20$，

所以$S_{16}=\frac{(a_1+a_{16})\times 16}{2}=8(a_5+a_{12})=160$，

故选：C.

4. 设α,β是两个平面，m,l是两条直线，则下列命题为真命题的是（　　）

A. 若$\alpha\perp\beta,m//\alpha,l//\beta$，则$m\perp l$

B. 若$m\subset\alpha,l\subset\beta,m//l$，则$\alpha//\beta$

C. 若$\alpha\cap\beta=m,l//\alpha,l//\beta$，则$m//l$

D. 若$m\perp\alpha,l\perp\beta,m//l$，则$\alpha\perp\beta$

【答案】C

【解析】

【分析】由线面平行性质判断真命题，举反例判定假命题即可.

【详解】对于A，m,l可能平行，相交或异面，故A错误，对于B，α,β可能相交或平行，故B错误，

对于D，α,β可能相交或平行，故D错误，由线面平行性质得C正确，

故选：C

5. 甲、乙、丙等5人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有2人，则不同排法共有（　　）

A. 20种　　B. 16种　　C. 12种　　D. 8种

【答案】B

【解析】

【分析】分类讨论：乙丙及中间2人占据首四位、乙丙及中间2人占据尾四位，然后根据分类加法计数原理求得结果.

【详解】因为乙和丙之间恰有2人，所以乙丙及中间2人占据首四位或尾四位，

①当乙丙及中间2人占据首四位，此时还剩末位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有A_2^2种方法，排甲有A_2^1种方法，剩余两个位置两人全排列有A_2^2种排法，

所以有$A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$种方法；

②当乙丙及中间2人占据尾四位，此时还剩首位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有A_2^2种方法，排甲有A_2^1种方法，剩余两个位置两人全排列有A_2^2种排法，

所以有$A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$种方法；

由分类加法计数原理可知，一共有$8+8=16$种排法，

故选：B.

6. 已知Q为直线$l:x+2y+1=0$上的动点，点P满足$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记$P$的轨迹为$E$，则（　　）

A. E是一个半径为$\sqrt{5}$的圆　　　　B. E是一条与l相交的直线

C. E上的点到l的距离均为$\sqrt{5}$　　　　D. E是两条平行直线

【答案】C

【解析】

【分析】设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$可得$Q$点坐标，由$Q$在直线上，故可将点代入坐标，即可得$P$轨迹$E$，结合选项即可得出正确答案.

【详解】设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，则$Q(x-1,y+3)$，

由Q在直线$l:x+2y+1=0$上，故$x-1+2(y+3)+1=0$，

化简得$x+2y+6=0$，即P的轨迹为E为直线且与直线l平行，

E上的点到l的距离$d=\frac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，故A、B、D错误，C正确.

故选：C.

7. 已知$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right),\tan2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\frac{1+\sin2\theta}{2\cos^2\theta+\sin2\theta}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　　　B. $\frac{3}{4}$　　　　C. 1　　　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦、余弦、正切二倍角公式，将$\frac{1+\sin2\theta}{2\cos^2\theta+\sin2\theta}$齐次化即可得出答案.

【详解】由题$\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right),\tan2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

得 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4\tan\theta}{1-(\tan\theta+1)^2}\Rightarrow-\frac{4\tan\theta}{(\tan\theta+1)^2}=2\tan\theta$,

则 $(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0\Rightarrow\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,

因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$, $\tan\theta\in(-1,0)$, 所以 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,

$$\frac{1+\sin2\theta}{2\cos^2\theta+\sin2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+1-1}{2+(-1)}=\frac{1}{4}.$$

故选：A

8. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过坐标原点的直线与 C 交于 A,B 两点，$|F_1B|=2|F_1A|,F_2A\cdot F_2B=4a^2$，则 C 的离心率为（　　）

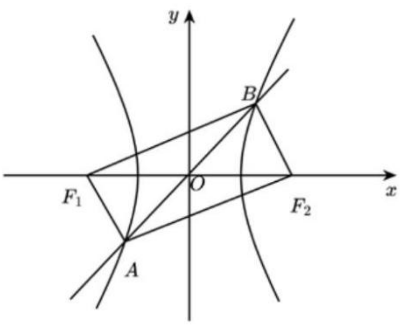
A. $\sqrt{2}$　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{5}$　　　　D. $\sqrt{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】由双曲线的对称性可得 $|F_1A|=|F_2B|$、$|F_1B|=|F_2A|$ 且四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，由题意可得出 $\angle F_2BF_1$，结合余弦定理表示出与 a、c 有关齐次式即可得离心率.

【详解】



由双曲线的对称性可知 $|F_1A|=|F_2B|$，$|F_1B|=|F_2A|$，有四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，

令 $|F_1A|=|F_2B|=m$，则 $|F_1B|=|F_2A|=2m$，

由双曲线定义可知 $|F_2A|-|F_1A|=2a$，故有 $2m-m=2a$，即 $m=2a$，

即 $|F_1A|=|F_2B|=m=2a$，$|F_1B|=|F_2A|=4a$，

$F_2A\cdot F_2B=|F_2A|\cdot|F_2B|\cos\angle AF_2B=2a\times4a\cos\angle AF_2B=4a^2$，

则 $\cos\angle AF_2B=\frac{1}{2}$，即 $\angle AF_2B=\frac{\pi}{3}$，故 $\angle F_2BF_1=\frac{2\pi}{3}$，

则有 $\cos\angle F_2BF_1=\frac{|F_1B|^2+|F_2B|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1B|\cdot|F_2B|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=-\frac{1}{2}$，

即 $\frac{20a^2-4c^2}{16a^2}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{20}{16}-\frac{4e^2}{16}=-\frac{1}{2}$，则 $e^2=7$，由 $e>1$，故 $e=\sqrt{7}$.

故选：D.

【点睛】关键点睛：本题考查双曲线的离心率，解题关键是找到关于 a、b、c 之间的等量关系，本题中结合题意与双曲线的定义得出 $|F_1A|$、$|F_2B|$ 与 a 的具体关系及 $\angle F_2BF_1$ 的大小，借助余弦定理表示出与 a、c 有关齐次式，即可得解.

二、选择题：本题共 **3** 小题，每小题 **6** 分，共 **18** 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 **6** 分，部分选对的得部分分，有选错的得 **0** 分．

9. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，则（　　）

A. 函数 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数

B. 曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=k\pi,k\in Z$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

D. $f(x)$ 的最小值为 -2

【答案】AC

【解析】

【分析】利用辅助角公式化简 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，再根据三角函数的性质逐项判断即可.

【详解】$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\sin2x\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\cos2x+\cos2x\cos\frac{3\pi}{4}-\sin2x\sin\frac{3\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = -\sqrt{2}\sin 2x$，

即 $f(x) = -\sqrt{2}\sin 2x$，

对于 A，$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos 2x$，易知为偶函数，所以 A 正确；

对于 B，$f(x) = -\sqrt{2}\sin 2x$ 对称轴为 $2x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$，故 B 错误；

对于 C，$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right), 2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，$y=\sin 2x$ 单调递减，则 $f(x) = -\sqrt{2}\sin 2x$ 单调递增，故 C 正确；

对于 D，$f(x) = -\sqrt{2}\sin 2x$，则 $\sin 2x\in[-1,1]$，所以 $f(x)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，故 D 错误；

故选：AC

10. 已知复数 z,w 均不为 0，则（　　）

A. $z^2 = |z|^2$

B. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$

C. $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

D. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】设出 $z=a+bi$、$w=c+di$，结合复数的运算、共轭复数定义及复数的模的性质逐个计算即可得.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathrm{R})$、$w=c+d\mathrm{i}\ (c,d\in\mathrm{R})$，

对 A：设 $z=a+bi\ (a,b\in\mathrm{R})$，则 $z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$，故 A 错误；

对 B：$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{\bar{z}\cdot z}$，又 $\bar{z}\cdot z=|z|^2$，即有 $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$，故 B 正确；

对 C：$z-w=a+b\mathrm{i}-c-d\mathrm{i}=a-c+(b-d)\mathrm{i}$，则 $\overline{z-w}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，

$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，$\bar{w}=c-d\mathrm{i}$，则 $\bar{z}-\bar{w}=a-b\mathrm{i}-c+d\mathrm{i}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，

即有 $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$，故 C 正确；