广东省中山市中山纪念中学2023-2024学年高一下学期第一次阶段考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知向量$\vec{a}=\left(\cos\frac{5\pi}{12},\sin\frac{5\pi}{12}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12}\right)$，那么$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．0

2．设$(1+2\mathrm{i})a+b=2\mathrm{i}$，其中$a,b$为实数，则（　）

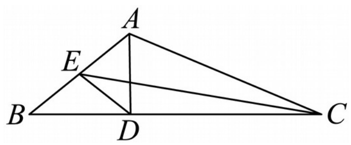
A．$a=1,b=-1$　　B．$a=1,b=1$　　C．$a=-1,b=1$　　D．$a=-1,b=-1$

3．已知$\tan\alpha=2$，则$\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha$等于（　）

A．-2　　B．2　　C．0　　D．$-\frac{2}{5}$

4．如图所示的$\triangle ABC$中，点D是线段BC上靠近B的三等分点，点E是线段AB的中点，

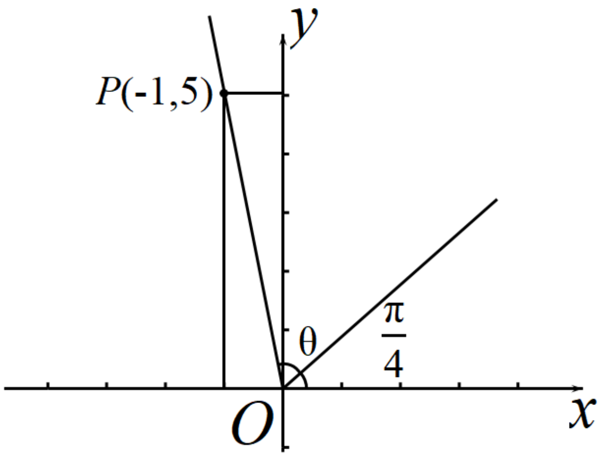
则$\overrightarrow{DE}=$（　）



A．$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　B．$-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

5．已知角θ的大小如图所示，则$\dfrac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=$（   ）



A．-5　　　　B．5　　　　C．$-\dfrac{1}{5}$　　　　D．$\dfrac{1}{5}$

6．若函数$f\left(\cos x\right)=\cos x+\cos 2x$，则$f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$（   ）

A．-2　　　　B．-1　　　　C．1　　　　D．2

7．设$\vec{a}$，$\vec{b}$都是非零向量，下列四个条件中，能使$\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$一定成立的是（   ）

A．$\vec{a}=-2\vec{b}$　　　　B．$\vec{a}^2=\vec{b}^2$　　　　C．$\vec{a}=2\vec{b}$　　　　D．$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$

8．已知函数$f\left(x\right)=2\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，（$\omega>0$）的图象在区间$\left(0,2\pi\right)$内至多存在3条对称轴，则$\omega$的取值范围是（   ）

A．$\left(0,\dfrac{5}{3}\right]$　　　　B．$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right]$　　　　C．$\left[\dfrac{7}{6},\dfrac{5}{3}\right)$　　　　D．$\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

二、多选题

9．下列结论正确的是（　　）

A．$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$

B．$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

C．$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

D．$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

10．已知向量$\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(2,t)(t\in\mathbf{R})$，则（　　）

A．与$\vec{a}$方向相同的单位向量的坐标为$\left(\frac{3}{13},-\frac{2}{13}\right)$

B．当$t=2$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角

C．当$t=1$时，$\vec{a}$、$\vec{b}$可作为平面内的一组基底

D．当$t=4$时，$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$\left(-\frac{3}{13},\frac{2}{13}\right)$

11．重庆荣昌折扇是中国四大名扇之一，始于1551年明代嘉靖年间，明末已成为贡品人朝，产品以其精湛的工业制作而闻名于海内外．经历代艺人刻苦钻研、精工创制，荣昌折扇逐步发展成为具有独特风格的中国传统工艺品，其精雅宜士人，其华灿宜艳女，深受各阶层人民喜爱．古人曾有诗赞曰："开合清风纸半张，随机舒卷岂寻常；金环并束龙腰细，玉栅齐编凤翅长，偏称游人携袖里，不劳侍女执花傍；宫罗旧赐休相妒，还汝团圆共夜凉"

图1为荣昌折扇，其平面图为图2的扇形COD，其中$\angle COD=\frac{2\pi}{3},OC=3OA=3$，动点$P$在$\overset{\frown}{CD}$上（含端点），连接$OP$交扇形$OAB$的弧$\overset{\frown}{AB}$于点$Q$，且$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$，则下列说法正确的是（　　）

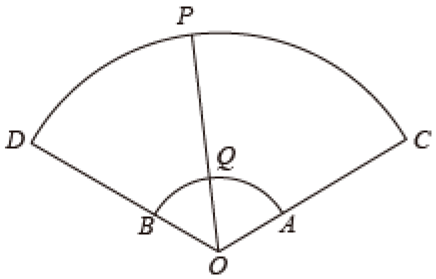


图 1　　　　　　图 2

A．若 $y=x$，则 $x+y=\frac{2}{3}$

B．若 $y=2x$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

C．$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}\geq -2$

D．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\geq\frac{11}{2}$

三、填空题

12．已知 $\sin\left(\frac{5\pi\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\left(\alpha+\frac{}{6}\right)$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为___.

13．将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，再将得到的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=2\sin(4x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，则 $f(x)=$_____.

14．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, AC=2, \angle BAC=120^{\circ}, \overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}, N$ 为 AC 中点，若 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{6}$，则实数 λ 的值为______.

四、解答题

15．已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a,\sqrt{3}b)$ 与 $\vec{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(1)求 A；

(2)若 $a=\sqrt{7},b=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16．已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x-1,x\in R$

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)函数 $f(x)$ 的单调递增区间和对称轴方程.

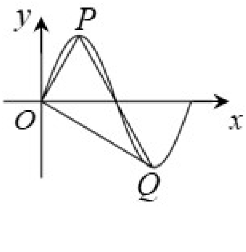
(3)求函数f(x)在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

17．某同学用“五点法”画函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入的部分数据如下表：

x	x_1	$\frac{1}{3}$	x_2	$\frac{7}{3}$	x_3
ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}$	2π
A	0	$\sqrt{}$	0	$-$	0

(1)请写出上表的 x_1、x_2、x_3，并直接写出函数的解析式；

(2)将 $f\left(x\right)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{2}{3}$ 个单位得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，P、Q 分别为函数 $g\left(x\right)$ 图象的最高点和最低点（如图），求∠OQP 的大小.



18．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边为a，b，c，且$\frac{3\left(\sin A-\sin B\right)}{\sin C}=\frac{3c-2b}{a+b}$．

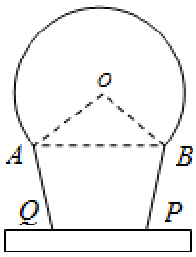
(1)求$\sin A$；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$\frac{16}{3}\sqrt{2}$；

①已知E为BC的中点，求$\triangle ABC$底边BC上中线AE长的最小值；

②求内角A的角平分线AD长的最大值．

19．长沙市雅礼中学为“雅礼杯”足球赛制作了冠军奖杯，奖杯的剖面图形如图所示，其中扇形OAB的半径为10，$\angle PBA=\angle QAB=60°$，$AQ=QP=PB$，若按此方案设计：



(1)当$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$时，在$\triangle AOB$中，G为AB边上任意一点，求$\overrightarrow{OG}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO}\right)$的最大值；

(2)制作商发现，当OP最长时，该奖杯比较美观，求此时$\angle AOB$的大小.

参考答案：

1．A

【分析】利用向量数量积的坐标运算和两角和的正弦公式可得答案.

【详解】$\vec{a}=\left(\cos\frac{5\pi}{12},\sin\frac{5\pi}{12}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12}\right)$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

故选：A.

2．A

【分析】根据复数代数形式的运算法则以及复数相等的概念即可解出.

【详解】因为$a,b\in\mathbf{R}$，$(a+b)+2a\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，所以$a+b=0,2a=2$，解得：$a=1,b=-1$.

故选：A.

3．D

【分析】根据齐次式问题分析求解.

【详解】因为$\tan\alpha=2$，

所以$\frac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{4-6}{4+1}=-\frac{2}{5}$.

故选：D.

4．B

【分析】根据平面向量的线性运算求得正确答案.

【详解】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

故选：B

5．A

【分析】由图中的信息可知 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-5$ ，化简 $\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$ 即可.

【详解】由图可知，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-5$ ，

$$\frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-5$$ ；

故选：A.

6．B

【分析】由二倍角公式结合换元法求出函数解析式即可求解.

【详解】因为 $f(\cos x)=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$

所以 $f(x)=x+2x^2-1,(-1\le x\le 1)$，

则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}-1=0$，

所以 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=-1\cdot$

故选：B.

7．C

【分析】根据非零向量的方向是否相同分别判断各个选项即可.

【详解】因为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，故 $\vec{a},\vec{b}$ 同向.

对于 A: $\vec{a}=-2\vec{b}$， $\vec{a},\vec{b}$ 方向相反,A 选项错误；

对于 B: $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，得出 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,不能得出方向，B 选项错误；

对于 C: $\vec{a}=2\vec{b}$ ，$\vec{a},\vec{b}$ 方向向相同,则 $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}$ 成立，C 选项正确；

对于 D: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,不能确定 $\vec{a},\vec{b}$ 的方向，D 选项错误.

故选：C.

8．A

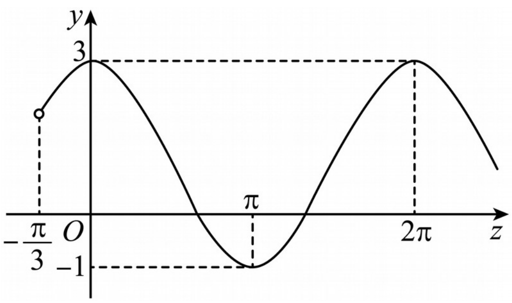
【分析】根据 $x\in(0,2\pi)$，$\omega>0$，得到 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\right)$，数形结合得到

$2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},3\pi\right]$，求出答案.

【详解】因为 $x\in(0,2\pi)$，$\omega>0$，

所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\right)$，

画出 $y=2\cos z+1$ 的图象，



要想图象在区间 $(0,2\pi)$ 内至多存在 3 条对称轴，则 $2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},3\pi\right]$，

解得$\omega \in \left(0,\frac{5}{3}\right]$.

故选：A

9．ABC

【分析】根据诱导公式逐一进行判断即可.

【详解】对于A,$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$,故A正确;

对于B,$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$,故B正确;

对于C,$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$,故C正确;

对于D,$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$,故D错误.

故选:ABC.

10．BC

【分析】根据与$\vec{a}$方向相同的单位向量为$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$可判断A选项；利用平面向量数量积的坐标运算可判断B选项；判断出$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，可判断C选项；利用投影向量的定义可判断D选项.

【详解】对于A，与$\vec{a}$方向相同的单位向量为$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(3,-2)=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$，故A错误；

对于B，当$t=2$时，$\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(2,2)$，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{6-4}{\sqrt{13}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{26}$，

所以，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，故B正确；

对于C，当$t=1$时，$\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(2,1)$，则$3\times1\neq-2\times2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，

$\vec{a}$、$\vec{b}$可作为平面内的一组基底，故C正确；

对于D，设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$\vec{b}$在$\vec{a}$方向的投影向量为$|\vec{b}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$，

当$t=4$时，$\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(2,4)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2-2\times4=-2$，$|\vec{a}|=\sqrt{13}$，

所以$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=-\frac{2}{13}(3,-2)=\left(-\frac{6}{13},\frac{4}{13}\right)$，故D错误.

故选：BC.

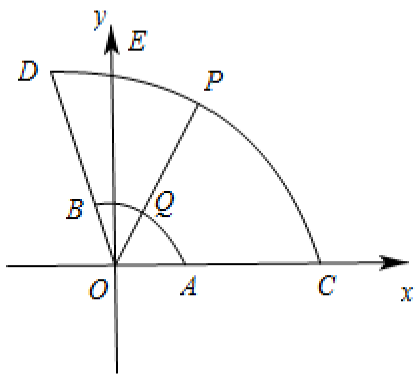
11．ABD

【分析】建立平面直角系，表示出相关点的坐标，设$Q(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,\frac{2\pi}{3}]$，可得

$P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，由$\overline{OQ}=x\overline{OC}+y\overline{OD}$，结合题中条件可判断A,B;表示出相关向量的坐标，

利用数量积的运算律，结合三角函数的性质，可判断C，D.

【详解】如图，作$OE\perp OC$，分别以OC,OE为x,y轴建立平面直角坐标系，



则$A(1,0),C(3,0),B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),D(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，