

第1章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.2 随机事件的概率

1.3 条件概率与事件的独立性

1.4 全概率公式与逆概率公式

1.1 随机事件

一、随机试验

二、样本空间

三、随机事件及其发生

四、事件之间的关系和运算

自然界所观察到的现象：**确定性现象** **随机现象**

(1) 确定性现象

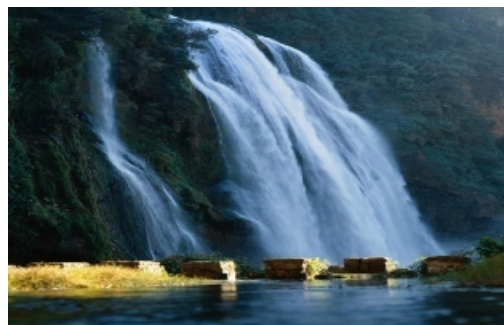
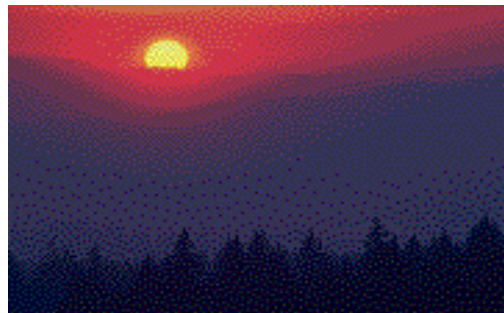
在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.

实例

“太阳不会从西边升起”，

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”，



确定性现象的特征  条件完全决定结果

(2) 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象.

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.



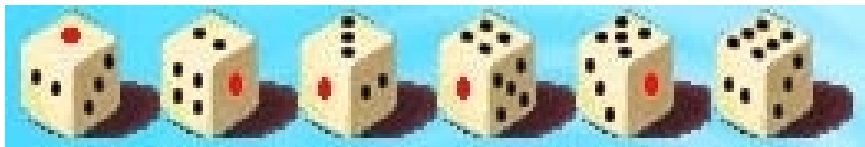
结果有可能**出现正面**也可能**出现反面**.

实例2 用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况.

结果: **弹落点会各不相同.**



实例3 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



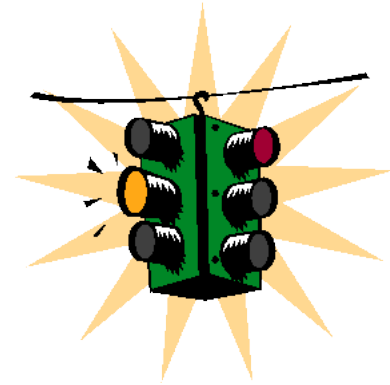
结果有可能为:

1, 2, 3,
4, 5 或 6.

实例4 从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

其结果可能为：
正品、**次品**.

实例5 过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯.



实例6 出生的婴儿可能**是男**,也可能是**女**.



实例7 明天的天气可能**是晴**,也可能是**多云**或**雨**.



随机现象的特征  条件不能完全决定结果

实例6 出生的婴儿可能**是男**,也可能**是女**.



实例7 明天的天气可能**是晴**,也可能**是多云**或**雨**.



随机现象的特征  条件不能完全决定结果

说明

- (1) 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系, 其数量关系无法用函数加以描述.
- (2) 随机现象在一次观察中出现什么结果具有**偶然性**, 但在大量试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计**规律性**, **概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.**

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

问题 什么是随机试验?



一、随机试验

在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为**随机试验**。

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

说明

(1) 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语. 它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

(2) 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币,观察正面、反面出现的情况”.



分析

(1) 试验可以在**相同的条件下重复地进行**;

(2) 试验的所有可能结果:

正面、反面;

(3) 进行一次**试验之前不能确定哪一个结果会出现**.



故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

(1) 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



(2) 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.



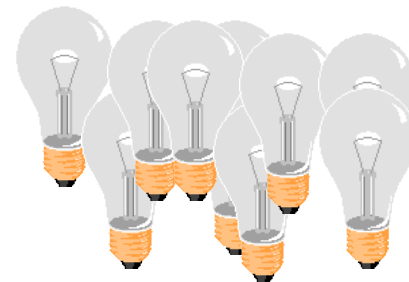
(3) 记录某公共汽车站某时刻的等车人数.



(4) 考察某地区 10 月份的
平均气温.



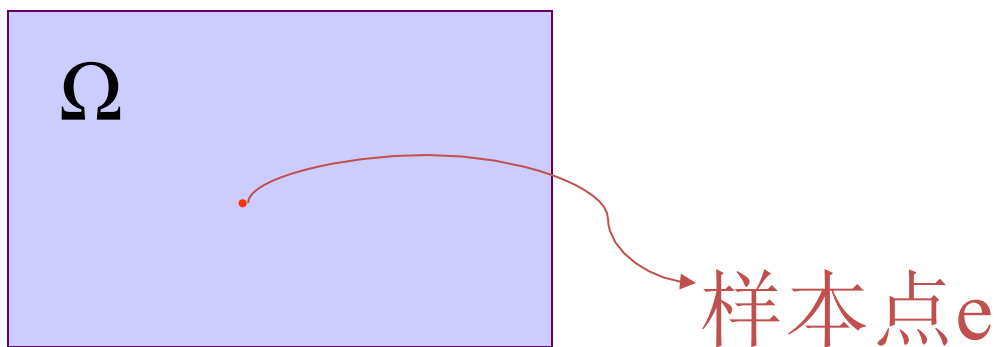
(5) 从一批灯泡中任
取一只,测试其寿命.



二、样本空间

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具。

我们把随机试验的每个基本结果称为**样本点**，记作 e 或 ω . 全体样本点的集合称为**样本空间**. 样本空间用 Ω 表示.



实例1 抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况.



$H \rightarrow$ 正面朝上

$T \rightarrow$ 反面朝上

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

实例2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

实例3 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记 $N \rightarrow$ 正品 $D \rightarrow$ 次品

则 $\Omega_3 = \{ NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD \}$.

实例4 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



$\Omega_4 = \{t \mid t \geq 0\}$.

其中 t 为灯泡的寿命.

实例5 记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$



说明

1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.
2. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

例如 对于同一试验: “**将一枚硬币抛掷三次**”.

若观察正面 H、反面 T 出现的情况, 则样本空间

为 $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$.

若观察出现正面的次数, 则样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}.$$

说明 3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此,一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如 只包含两个样本点的样本空间

$$\Omega = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现**正面**或出现**反面**的模型,也可以作为产品检验中**合格**与**不合格**的模型,又能用于排队现象中**有人排队**与**无人排队**的模型等.



在具体问题的
研究中，描述随机
现象的第一步就是
建立样本空间.

三、随机事件及其发生

随机事件：

通俗地讲 随机事件是指随机试验中可能发生也可能不发生的结果。

根据这个说法不难发现 随机事件和样本空间的子集有一一对应关系！

实例 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.



“点数不大于4”，“点数为偶数” 等都为随机事件.

它们分别可以对应了样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
的
子集 $\{1,2,3,4\}$ 和 $\{2,4,6\}$.

反过来， Ω 的每个子集都对应了该试验的一个随机事件.

随机事件的定义

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件，简称事件.

当且仅当子集 A 中某个样本点出现时，称事件 A 发生.

实例 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.



特别地：

基本事件 由一个样本点组成的单点集

实例 “出现1点”，“出现2点”，...，“出现6点”.

必然事件 随机试验中必然发生的事件.

实例 上述试验中“点数不大于6”就是必然事件.

不可能事件 随机试验中不可能发生的事件.

实例 上述试验中“点数大于6”就是不可能事件.

几点说明

1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 A, B, C, \dots 来表示事件

例如 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设 $A =$ “点数不大于4”,

$B =$ “点数为奇数” 等等.

2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

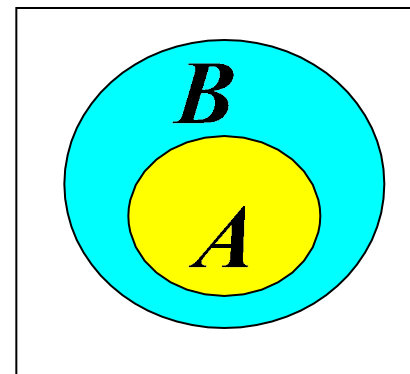
每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

样本空间 Ω 作为自身最大的子集包含所有的样本点（基本事件），表示**必然事件**。

空集 ϕ 不含任何样本点表示**不可能事件**。

四、事件之间的关系和运算

事件之间的关系



$$A \subset B$$

1. 事件的包含

设 A B 为两个事件，如果 A 中的基本事件都是 B 的基本事件，则称 A 包含于 B ，记为 $A \subset B$ ，或 B 包含 A ，记为 $B \supset A$ 。

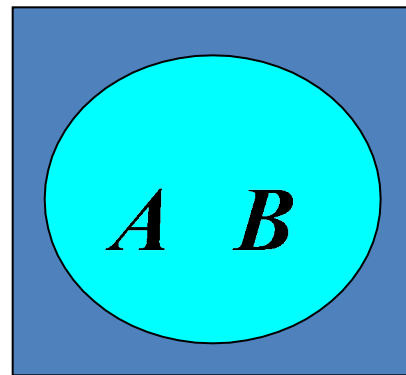
事件 A 发生  事件 B 发生

实例 A = “长度不合格” 必然导致 B = “产品不合格”
”
所以 $A \subset B$

2.事件的相等

若两个事件 A 和 B 相互包含，则称这两个事件相等，记为 $A=B$.

$$A \subset B \text{ 且 } B \subset A \quad \longrightarrow \quad A = B$$



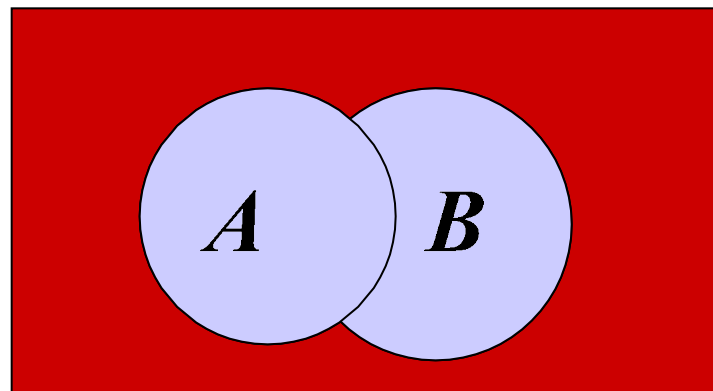
$$A = B$$

A 和 B 同时发生或者同时不发生

3.事件的和（并）

A 和 B 至少有一个发生

$\Leftrightarrow A \cup B$ 发生

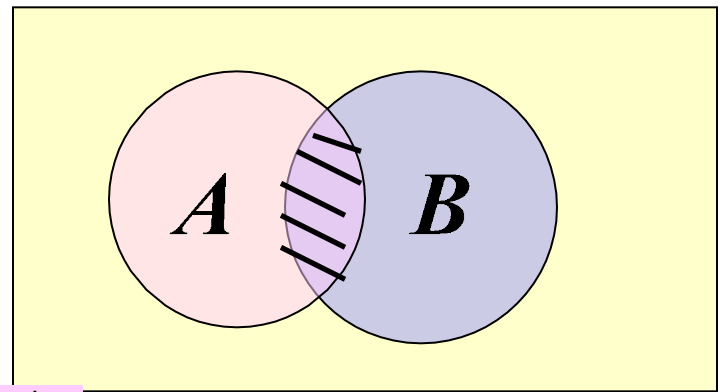


$A \cup B$

将事件 A 的基本事件和 B 的基本事件合在一起组成的一个新事件，称为 A 和 B 的和事件，记为 $A \cup B$ ，可读成 A 并 B 或 A 加 B . 有时也可记为 $A + B$.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此 C = “产品不合格”是 A = “长度不合格”与 B = “直径不合格”的并, 即 $C = A \cup B$

4.事件的积（交）



A 和 B 同时发生 $\Leftrightarrow A \cap B$ 发生

$A \cap B$

将事件 A 的和 B 共有基本事件合在一起组成的一个新事件，称为 A 和 B 的和事件，记为 $A \cap B$ ，可读成 A 交 B 或 A 乘 B 。有时也可记为 AB 。

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,设 C = “**产品合格**”, A = “**长度合格**”, B = “**直径合格**”。 则 $C = A \cap B = AB$

推广 称 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的和事件

称 $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的积事件

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

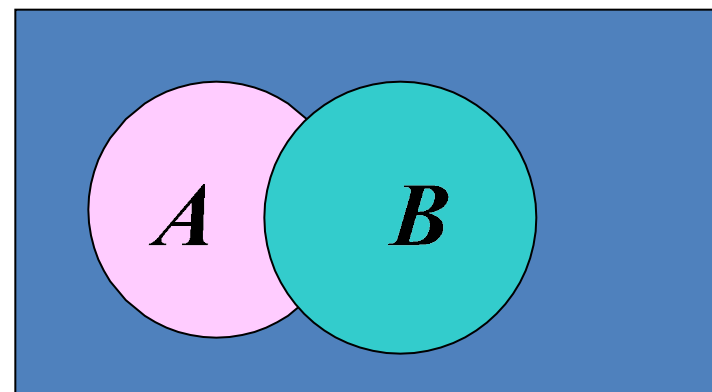
5.事件的差（减）

事件 A 发生而事件 B 不发生

从事件 A 中将属于事件 B 的基本事件除去,剩下的基本事件组成的新事件称为 A 和 B 的差事件,记为 $A - B$.

实例 设 $C =$ “长度合格但直径不合格”, $A =$ “长度合格”, $B =$ “直径合格”.

则 $C = A - B$



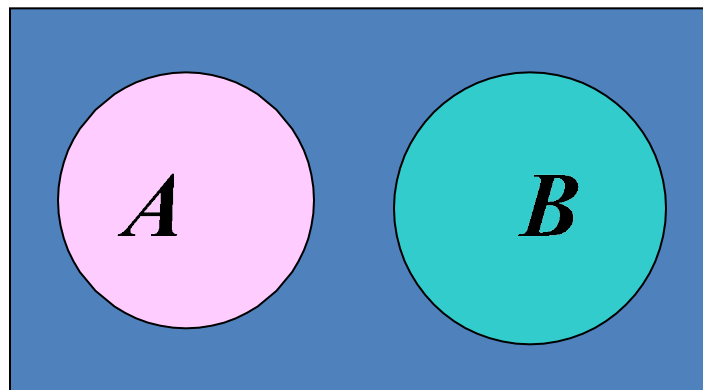
$A - B$

6.事件的互斥（互不相容）

事件 A 、 B 不可能同时发生

若事件 A 和 B 没有共同的基本事件，则称 A 和 B 互斥，也称互不相容，记为 $A \cap B = \phi$ 或 $AB = \phi$

注意 基本事件是两两互斥的。



$A \cap B = \phi$ 或 $AB = \phi$

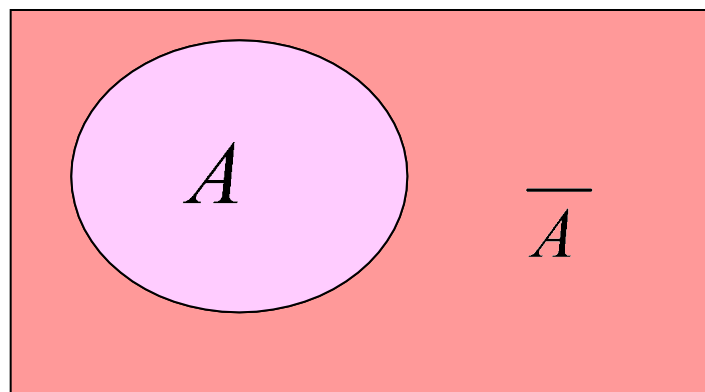
7.事件的逆（对立事件）

事件 A 不发生

称必然事件 Ω 和事件 A 的差 $\Omega - A$ 为 A 的逆事件，记为 \bar{A} ，若 B 是 A 的逆事件，则 $B = \bar{A} = \Omega - A$

显然， $\overline{\bar{A}} = A$

$B = \bar{A}$ 时， A, B 互逆



如果 A 和 B 互逆，则也可称 A 和 B 互为对立事件

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律. 设 A, B, C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A,$

$$A \cap B = B \cap A;$$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}} = A;$

(5) 对偶律 $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},$
 $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

注： 上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

(6) 吸收律 若 $A \subset B$, 则 $AB = A$, $A \cup B = B$

(7) 替换律

$$AB = A - (A - B) = B - (B - A)$$

$$A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B)$$

$$A - B = A - AB = A \cup B - B = \overline{A \overline{B}}$$

$$A - B - C = A - (B \cup C) = A \overline{B} \overline{C}$$

例 1 甲, 乙, 丙三人各射一次靶, 记 A —“甲中靶”,
 B —“乙中靶”, C —“丙中靶”, 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

(1) “甲未中靶” \bar{A} ;

(2) “甲中靶而乙未中靶” $A\bar{B}$;

(3) “三人中只有丙未中靶” $ABC\bar{C}$;

(4) “三人中恰好有一人中靶” $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(5) “三人中至少有一人中靶” $A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$;

(6) “三人中至少有一人未中靶” $\bar{A}U\bar{B}U\bar{C}$ 或 \overline{ABC} ;

(7) “三人中恰有两人中靶” $AB\bar{C}U A\bar{B}C U \bar{A}BC$;

(8) “三人中至少有两人中靶” $ABU ACU BC$;

(9) “三人中均未中靶” $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

(10) “三人中至多一人中靶”

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}U \bar{A}B\bar{C}U \bar{A}\bar{B}C U \bar{A}B\bar{C};$$

(11) “三人中至多两人中靶” \overline{ABC} 或 $\bar{A}U\bar{B}U\bar{C}$.

(6) “三人中至少有一人未中靶”

(11) “三人中至多两人中靶”

注:用其它事件的运算来表示一个事件,方法往往不唯一,如本例中的(6)和(11)实际上是同一事件,大家应学会用不同方法表达同一事件,特别在解决具体问题时,往往要更具需要选择一种恰当的表达方法.

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率。

概率是随机事件发生可能性大小的度量



事件发生的可能性越大，概率就越大！

1.2 随机事件的概率

一、概率的统计意义

二、概率的公理化定义

三、概率的性质

四、概率的古典定义

一、概率的统计意义

定义 若在相同条件下进行 n 次试验, 其中 A 发生的次数为 $r_n(A)$, 则称 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

显然

$$0 \leq r_n(A) \leq n$$

$$0 \leq f_n(A) \leq 1;$$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验 序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	$r_n(A)$	$f_n(A)$	$r_n(A)$	$f_n(A)$	$r_n(A)$	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	24	0.48	249	0.498
3	4	0.8	23	0.46	253	0.506
4	5	1.0	21	0.42	250	0.502
5	6	1.2	25	0.50	247	0.494
6	7	1.4	26	0.52	252	0.504
7	8	1.6	18	0.36	262	0.524
		0.8	27	0.54	258	0.516

随 n 的增大, 频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

在 $\frac{1}{2}$ 处波动最小

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/408056057104006120>