senior high school education

6.3.1　平面向量基本定理

预 学 案

共 学 案

预 学 案

平面向量基本定理❶

(1)定理：如果$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个__不共线__向量，那么对于这一平面内的任一向量$\boldsymbol{a}$，__有且只有__对实数λ_1，λ_2，使$\boldsymbol{a}=$__$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$__.

(2)基底：不共线的向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$叫做表示这一平面内__所有向量__的一组基底.

【即时练习】

1．判断正误(正确的画“√”，错误的画“×”)

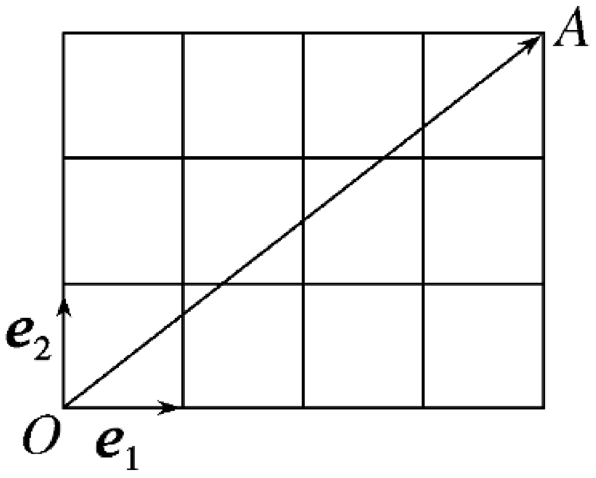
(1)只有非零向量才能用平面内的一组基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$线性表示．(×)

(2)同一向量用两组不同的基底表示时，表示方法是相同的．(×)

(3)若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，且$\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$，则$\lambda_1=\lambda_2$，$\mu_1=\mu_2$.(√)

(4)平面向量的基底不唯一，只要基底确定后，平面内的任何一个向量都可用这组基底唯一表示．(√)

2. 如图所示，向量$\overrightarrow{OA}$可用向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$表示为$4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.



解析： 由图可知$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$为平面内的一组正交单位基底，A点在$\boldsymbol{e}_1$方向有4个单位，在$\boldsymbol{e}_2$方向有3个单位，所以$\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

微点拨❶

(1)基底不唯一，只要是同一平面内的两个不共线向量都可以构成基底向量．同一非零向量在不同基底下的分解式是不同的．

(2)基底给定时，分解形式唯一．λ_1，λ_2是被$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$唯一确定的数值．

(3)$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$是表示同一平面内所有向量的一个基底，则当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}_1$共线时，$\lambda_2=0$；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}_2$共线时，$\lambda_1=0$；当$\boldsymbol{a}=0$时，$\lambda_1=\lambda_2=0$.

(4)由于零向量与任何向量都是共线的，因此零向量不能作为基底中的向量．

共学案

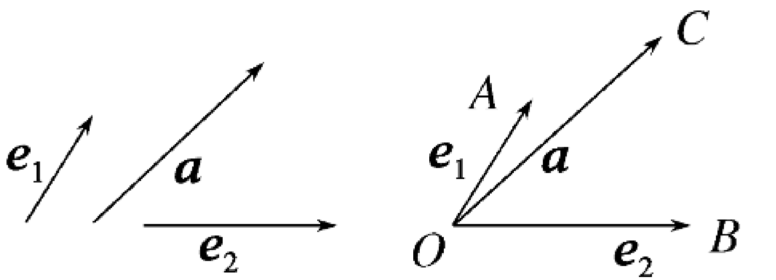
【学习目标】

(1)理解平面向量基本定理的内容，理解向量一组基底的含义.

(2)在平面内，选定一组向量基底，会用这组基底表示其他向量.

(3)会应用平面向量基本定理解决有关平面向量的综合问题.

题型 1　平面向量基本定理



【问题探究】　如图，设$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个不共线的向量，$\boldsymbol{a}$是这一平面内与$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$都不共线的向量，在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$.

(1)将$\boldsymbol{a}$按$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$的方向分解，你有什么发现？

(2)如果向量$\boldsymbol{a}$是这一平面内与$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$中的某一个向量共线的非零向量，你能用$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$表示出$\boldsymbol{a}$吗？

(3)当$\boldsymbol{a}$是零向量时，$\boldsymbol{a}$还能用$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$表示吗？

(4)平面内任何一个向量$\boldsymbol{a}$都可以表示成$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$的形式，这种表示形式是唯一的吗？

答案　返回导航

例1　(多选)已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，则下列各组向量中，能作平面向量的一组基底的有(　　)

A．$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}，2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$　B．$\{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$

C．$\{3\boldsymbol{a}，\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\}$　D．$\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\}$

答案：ACD

解析：因为向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，对于A选项，设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$共线，可设$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，可得出$\begin{cases}\lambda=2,\\\lambda=1,\end{cases}$无解，所以，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$不共线，A中的向量能作基底，同理可知C、D选项中的向量也可作平面向量的基底；对于B选项，因为$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$\{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$不能作平面向量的基底．故选ACD.

解析　答案　返回导航

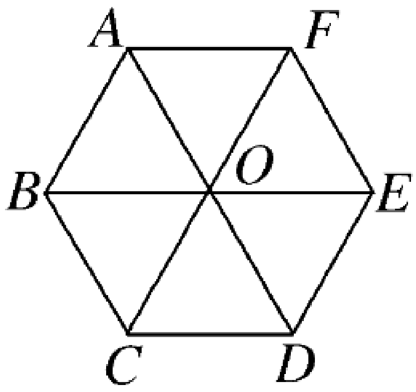
学霸笔记

(1)两个向量能否作为一组基底，关键是看这两个向量是否共线．若共线，则不能作基底，反之，则可作基底．

(2)一个平面的基底一旦确定，那么平面上任意一个向量都可以由这组基底唯一线性表示出来．

返回导航

跟踪训练1　如图，点O为正六边形$ABCDEF$的中心，其中可作为基底的一组向量是(　　)



A．$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BC}$　B．$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CD}$

C．$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CF}$　D．$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DE}$

答案：B

解析：由基底的概念可知，作为基底的一组向量不能共线．由题图可知，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{BC}$共线，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CF}$共线，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DE}$共线，均不能作为基底向量，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，可作为基底向量．

解析　答案　返回导航