品备考资料

（知识点/试题卷/真题）

考前多练习

考后多得分

精准抓考点

快速冲高分

2022年北京大学强基计划笔试数学试题

备注：数学一共20道题目

1. 已知$2n+1$与$3n+1$均为完全平方数且n不超过2022，则正整数n的个数为__________.

2. 已知凸四边形$ABCD$满足$\angle ABD=\angle BDC=50^\circ,\angle CAD=\angle ACB=40^\circ$，则符合题意且不相似的凸四边形$ABCD$的个数为__________.

3. 已知正整数y不超过2022且满足100整除2^y+y，则这样的y的个数为__________.

4. 已知$[x]$表示不超过x的整数，如$[1.2]=1,[-1.2]=-2$.已知$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，则$[\alpha^{12}]=$（　　）

A. 321　　B. 322　　C. 323　　D. 以上都不对

5. 已知六位数$\overline{y_1y_2f_3f_4d_5d_6}$，满足$\dfrac{\overline{y_1y_2f_3f_4d_5d_6}}{\overline{f_4d_5d_6}}=\left(1+\overline{y_1y_2f_3}\right)^2$，则所有满足条件的六位数之和为__________.（$\overline{f_4d_5d_6}$不必为三位数）

6. 已知整数a,b,c,d满足$a+b+c+d=6$，则$ab+ac+ad+bc+bd+cd$的正整数取值个数为__________.

7. 已知凸四边形$ABCD$满足：$AB=1,BC=2,CD=4,DA=3$，则其内切圆半径取值范围为__________.

8. 已知$a,b\in R,z_1=5-a+(6-4b)\mathrm{i},z_2=2+2a+(3+b)\mathrm{i},z_3=3-a+(1+3b)\mathrm{i}$，当$|z_1|+|z_2|+|z_3|$最小时，$3a+6b=$__________.

9. 已知复数z，满足$\dfrac{z}{2}$与$\dfrac{2}{z}$　实部和虚部均属于$[-1,1]$，则z在复平面上形成轨迹的面积为__________.

10. 在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{c}{2}(a-b)$，其外接圆半径$R=2$，且$4\left(\sin^2A-\sin^2B\right)=\left(\sqrt{3}a-b\right)\sin B$，则$\sin\dfrac{A-B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=$__________.

11. 在梯形$ABCD$中，$AD\,//\,BC,M$在边CD上，有$\angle ABM=\angle CBD=\angle BCD$，则$\dfrac{AM}{BM}$取值范围为__________.

12. 已知$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$，则该方程所有实根个数与所有实根乘积　比值为__________.

13. 若A为十进制数，$A=\overline{a_0a_1\ldots a_n}$，记$D(A)=a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n$.已知$b_0=2033^{10},b_{n+1}=D(b_n)$，则$b_{2022}$各位数字的平方和__________200（横线上填大于，小于或等于）.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=12, a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3+a_n+3\sqrt{1+2a_n}\right)$，则$a_{10}$最接近的整数为__________.

15. 已知$f(x)$是二次函数，$f(-2)=0$，且$2x\le f(x)\le\frac{x^2+4}{2}$，则$f(10)=$__________.

16. 已知数列$\{a_k\}_{1\le k\le 5}$各项均为正整数，且$|a_{k+1}-a_k|\le 1, \{a_k\}$中存在一项为3，可能 数列的个数为

__________.

17. 将不大于12 正整数分为6个两两交集为空的二元集合，且每个集合中两个元素互质，则不同的分法有__________种.

18. 已知y, f, d为正整数，$f(x)=(1+x)^y+(1+x)^f+(1+x)^d$.其中$x$的系数为10，则$x^2$的系数的最大可能值与最小可能值之和为__________.

19. 若$\triangle ABC$三边长为等差数列，则$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围是__________.

20. 内接于椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 菱形周长的最大值和最小值之和是（ ）

A. $4\sqrt{13}$ B. $14\sqrt{13}$ C. $\frac{110}{3}\sqrt{13}$ D. 上述三个选项都不对

答案详解

1. 已知 $2n+1$ 与 $3n+1$ 均为完全平方数且 n 不超过 2022，则正整数 n 的个数为____________.

【答案】1

【解析】

【分析】根据题意整理可得：$(3a)^2-6b^2=3$，构建佩尔方程 $x^2-6y^2=3$，先结合题意得

$3<x_k\le 189$，再根据广义佩尔方程　通解可得 $x_k=\dfrac{\left(3+2\sqrt{6}\right)(5+2\sqrt{6})^k+\left(3-2\sqrt{6}\right)(5-2\sqrt{6})^k}{2}$，再根

据特征方程可得二阶线性递推公式 $x_{k+2}=10x_{k+1}-x_k$，代入检验判断.

【详解】设 $2n+1=a^2,3n+1=b^2$

化简得到 $3a^2-2b^2=1$，即 $(3a)^2-6b^2=3$，

由于 $(3,1)$ 为佩尔方程 $x^2-6y^2=3$ 的一组解，由佩尔方程的性质知其有无穷多组解，

对其任意一组解 (x_k,y_k)，由于 $x_k^2=6y_k^2+3$，所以 x_k 为被 3 整除的正奇数.

则 $a=\dfrac{x_k}{3},n=\dfrac{a^2-1}{2}$，知这样的 n 均为正整数.

由于 $1\le n\le 2022$，知 $1<a\le 63$，所以 $3<x_k\le 189$，

$(5,2)$ 为佩尔方程 $x^2-6y^2=1$ 的基本解

由佩尔方程的通解知 $x_k=\dfrac{\left(3+2\sqrt{6}\right)(5+2\sqrt{6})^k+\left(3-2\sqrt{6}\right)(5-2\sqrt{6})^k}{2}$，

由特征方程知其所对应的递推公式为 $x_{k+2}=10x_{k+1}-x_k,x_1=3,x_2=27$，得 $x_3=267$，

因此仅 $x_2=27$ 满足条件，此时 $n=40$.

所以这样的 n 为 1 个.

故答案为：1.

2. 已知凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABD=\angle BDC=50^\circ,\angle CAD=\angle ACB=40^\circ$，则符合题意且不相似的

凸四边形 $ABCD$ 的个数为____________.

【答案】2

【解析】