§3.3.1 线性方程组解的判定

一、线性方程组的解的判定

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

m、n 不一定相等！

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

定义1 线性方程组如果有解，就称它是**相容的**；如果无解，就称它是**不相容的**.

问题1： 方程组是否有解？

问题2： 若方程组有解，则解是否唯一？

问题3： 若方程组有解且不唯一，则如何表示解的全体？

定理1 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$

①无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$;

②有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$;

③有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

分析： 只需证明条件的充分性，即

- $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解;
- $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解;
- $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

那么

- ✓ 无解 $\Rightarrow R(A) < R(A, b)$;
- ✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) = n$;
- ✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明：设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A,b)$ 的行最简形矩阵为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A)\le R(A,b)\le R(A)+1}$$

第一步：往证 $R(A)<R(A,b)\ \Rightarrow$ 无解.

若 $R(A)<R(A,b)$，即 $R(A,b)=R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是 第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 行 / 前 n 行

后 m−n 行

前 r 列 / 前 n 列

后 n - r 列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{pmatrix}$$

对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

第二步：往证 $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A) = R(A, b) = n$， 即 $r = n$， 则 $d_{r+1} = 0$ 且 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$
\tilde{B} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}_{m\times(n+1)}
$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

第三步： 往证 $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A) = R(A, b) < n$，即 $r < n$，则 $d_{r+1} = 0$.

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

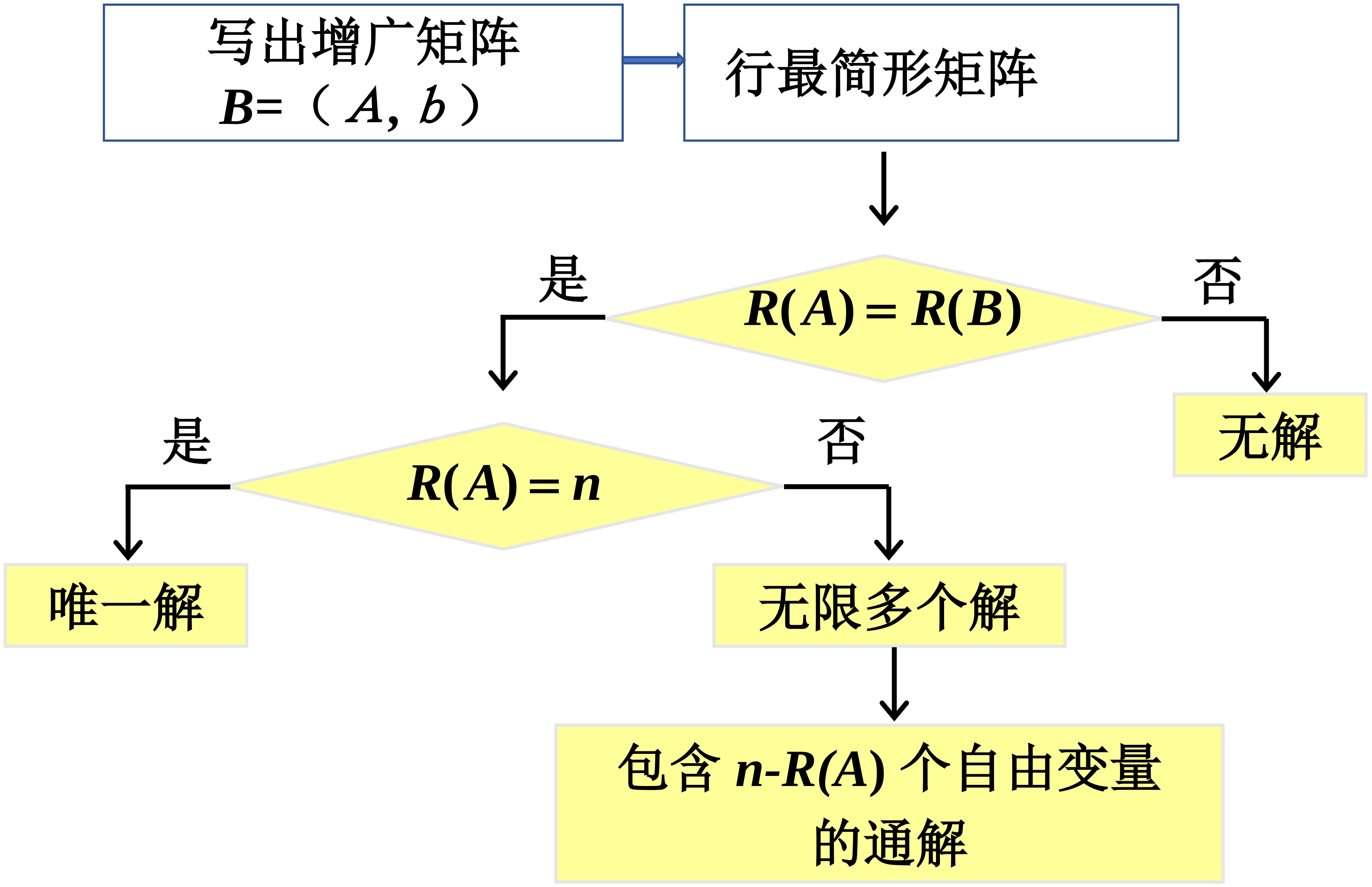
$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

线性方程组
的通解

再令 $x_{r+1} = c_1,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

求解线性方程组的步骤



例1： 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解： $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = R(A, b) = 3 < 4$，故原线性方程组有无穷多解.

解（续）：$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

即得与原方程组同解的方程组 $\begin{cases}x_1 - x_3 = 4,\\ x_2 - x_3 = 3,\\ x_4 = -3.\end{cases}$

令 x_3 做自由变量，则 $\begin{cases}x_1 = x_3 + 4,\\ x_2 = x_3 + 3,\\ x_4 = -3.\end{cases}$

于是，方程组的通解可表示为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\ 3\\ 0\\ -3\end{pmatrix}.$

例2： 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2$，$R(A, b) = 3$，故原线性方程组无解.

例3：求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

分析：只需对系数矩阵 A 进行初等行变换变为行最简形矩阵。为什么？

答：因为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的常数项都等于零，于是必有 $R(A, 0) = R(A)$，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组的解的情况.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{pmatrix}\underset{\sim}{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -5/3\\ 0 & 1 & 2 & 4/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\because R(A)<4,\quad \therefore$ 方程组有无穷多解.

即得与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1-2x_3-5/3x_4=0\\ x_2+2x_3+4/3x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_3+5/3x_4\\ x_2=-2x_3-4/3x_4\end{cases}$$