2-5 求通过 $x(0)=1$，$x(1)=2$，使下列性能泛函为极值的极值曲线 $x^*(t)$：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}(1+\dot{x}^2)dt$$

解：由题可知，始端和终端均固定，

被积函数 $L=1+\dot{x}^2$，$\frac{\partial L}{\partial x}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}$，$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\ddot{x}$

代入欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$，可得 $2\ddot{x}=0$，即 $\ddot{x}=0$

故 $\dot{x}=c_1$ 其通解为：$x=c_1t+c_2$

代入边界条件 $x(0)=1$，$x(1)=2$，求出 $c_1=1$，$c_2=1$

极值曲线为 $x^*(t)=t+1$

2-6 已知状态的初值和终值为

$$x(1)=4，\quad x(t_f)=4$$

式中 t_f 自由且 $t_f>1$，试求使下列性能泛函达到极小值的极值轨线 $x^*(t)$：

$$J=\int_1^{t_f}[2x(t)+\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)]dt$$

解：由题可知，$L=2x+\frac{1}{2}\dot{x}^2$，$\psi(t_f)=4$，$x(1)=4$，$x(t_f)=4$

欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$

横截条件：$x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=\psi(t_f)$，$\left.\left(L+(\dot{\psi}-\dot{x})^T\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_f}=0$

易得到 $\frac{d\dot{x}}{dt}=2$ 故 $\dot{x}=2t+c_1$

其通解为：$x(t)=t^2+c_1t+c_2$

根据横截条件可得：$\begin{cases} x(1)=1+c_1+c_2=4 \\ x(t_f)=t_f^2+c_1t_f+c_2=4 \\ \dot{x}(t_f)=2t_f+c_1=4 \end{cases}$

解以上方程组得：$\begin{cases} t_f = 5 \\ c_1 = -6 \\ c_2 = 9 \end{cases}$ 还有一组解 $\begin{cases} t_f = 1 \\ c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$（舍去，不符合题意 $t_f > 1$）

将 t_f，c_1，c_2 代入 J 可得 $J^* = \int_0^5 (2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2)dt = 4\int_0^5 (t-3)^2 = \frac{140}{3}$.

极值轨线为 $x^*(t) = t^2 - 6t + 9$

2-7 设性能泛函为

$$J = \int_0^1 (1 + \dot{x}^2)dt$$

求在边界条件 $x(0) = 0$，$x(1)$ 自由情况下，使性能泛函取极值的极值轨线 $x^*(t)$。

解：由题可知，$L = 1 + \dot{x}^2$，$x(0) = 0$，$x(1)$ 自由

欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

横截条件：$x(t_0) = x_0$，$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$、$\left.\left(L + \dot{x}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_f} = 0$

易得到 $\dot{x}(t) = a$

其通解为：$x(t) = at + b$

代入边界条件 $\dot{x}(t_f) = a$，$x(0) = 0$，$t_f = 1$，求出 $a = 0$，$b = 0$

将 t_f，a，b 代入 J 可得 $J^* = \int_0^1 (1 + \dot{x}^2)dt = 1$

极值轨线为 $x^*(t) = 0$

2—8 设泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t)dt$$

端点 $A(x_{10}, x_{20}, t_0)$ 固定，端点 $B(x_1(t_f), x_2(t_f), t)$ 可沿空间曲线

$$c_1(t_f)=\varphi(t_f),\ c_2(t_f)=\psi(t_f)$$

移动。试证：当泛函取极值时，横截条件为

$$\left[L+(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right]\Bigg|_{t_f}=0$$

证：根据题意可知，此题属于起点固定，末端受约束情况，由 P_{25} 可得，

$$\left[L-(\dot{c}-\dot{x})^T\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\Bigg|_{t_f}=0$$

（1）

由 $[\varphi,\psi]^T$，$\dot{x}=(\dot{x}_1,\dot{x}_2)^T$

$$(\dot{c}-\dot{x})^T=(\dot{\varphi}-\dot{x}_1,\dot{\psi}-\dot{x}_2),\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1},\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)^T$$

$$\therefore\quad (\dot{c}-\dot{x})^T\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}$$

（2）

将（2）代入（1）式，得：

$$\left[L-(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right]\Bigg|_{t_f}=0$$，得证。

2-13 设系统状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad x_1(0)=2$$

$$\dot{x}_2(t)=u(t),\quad x_2(0)=1$$

性能指标如下：

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2(t)dt$$

要求达到$x(t_f)=0$，试求

（1）$t_f=5$时的最优控制$u^*(t)$。

（2）t_f自由时的最优控制$u^*(t)$。

解：由题可知

构造 H：$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

正则方程：
$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=0\\[2mm] \dot{\lambda}_2(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\end{cases}$$

可求得
$$\begin{cases}\lambda_1(t)=c_1\\ \lambda_2(t)=-c_1 t+c_2\end{cases}$$

控制方程：$\dfrac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$

由上式可得 $u(t)=-\lambda_2=c_1 t-c_2$

由状态方程$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，$\dot{x}_2(t)=u(t)$可得
$$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{1}{6}c_1 t^3-\dfrac{1}{2}c_2 t^2+c_3 t+c_4\\[2mm] x_2(t)=\dfrac{1}{2}c_1 t^2-c_2 t+c_3\end{cases}$$

（1）$t_f=5$时

由边界条件$x_1(0)=2$，$x_2(0)=1$，$x_1(t_f)=0$，$x_2(t_f)=0$可得
$$\begin{cases}c_3=1\\ c_4=2\\ \dfrac{1}{6}c_1*5^3-\dfrac{1}{2}c_2*5^2+c_3*5+c_4=0\\[2mm] \dfrac{1}{2}c_1*5^2-c_2*5+c_3=0\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}c_1=\dfrac{54}{125}\\[2mm] c_2=\dfrac{32}{25}\\ c_3=1\\ c_4=2\end{cases}$$

故
$$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{9}{125}t^3-\dfrac{16}{25}t^2+t+2\\[2mm] x_2(t)=\dfrac{27}{125}t^2-\dfrac{32}{25}t+1\end{cases}$$
有 $\dot{x}_2(t)=\dfrac{54}{125}t-\dfrac{32}{25}$

有最优控制 $u^*(t)=\frac{54}{125}t-\frac{32}{25}$

（2）若 t_f 自由

由哈密顿函数在最优轨线末端应满足的条件

$$H(t_f)=\frac{1}{2}u^2(t_f)+\lambda_1(t_f)x_2(t_f)+\lambda_2(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}=0$$ 得 $u(t_f)=0$

即 $\lambda_2(t_f)=0$，从而 $c_2=c_1t_f$，代入 $\begin{cases}\frac{1}{6}c_1t_f^3-\frac{1}{2}c_2t_f^2+t_f+2=0\\ \frac{1}{2}c_1t_f^2-c_2t_f+1=0\end{cases}$ 可得 $t_f=-6$

因为时间总为正值，所以此题无解。

3-2 设二阶系统的状态方程 $\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)&=x_1(t)+u(t),\end{aligned}$ 边界条件 $\begin{aligned}x_1(0)=1,x_2(0)=1\\ x_1(2)=0,x_2(2)=0\end{aligned}$ 试求下列性能指标的极小值：$J=\frac{1}{2}\int_0^2[x_1(t)+u(t)]^2dt$

解：由题可知

构造 H：$H=L+\lambda f=\frac{1}{2}(x_1+u)^2+\lambda_1x_2+\lambda_2(x_1+u)$

由协态方程和极值条件：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-[(x_1+u)+\lambda_2]\\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\\ \frac{\partial H}{\partial u}=x_1+u+\lambda_2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\lambda_1=c_1\\ \lambda_2=c_1t+c_2\end{cases}$ 代入状态方程得：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=c_1(t)+c_2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=c_1t^3-\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4\\ x_2=\frac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3\end{cases}$，代入初始

条件解得：$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 3.5 \\ c_3 = 1 \\ c_4 = 1 \end{cases}$

故$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1 \\ x_2^*(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 \end{cases}$，

此时$J^* = \frac{1}{2}\int_0^2 [x_1(t) + u(t)]^2 dt = \int_0^2 (3t - 3.5)^2 dt = 0.3077$

3-4 给定一阶系统方程

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1$$

控制约束为$|u(t)| \le 1$，试求使下列性能指标：

$$J = \int_0^1 [x(t) - \frac{1}{2}u(t)]dt$$

为极小值的最优控制$u^*(t)$及相应的最优轨线$x^*(t)$。

解：由题可知

构造 H：$H = (x - \frac{u}{2}) + \lambda(-x + u) = (1 - \lambda)x + (\lambda - \frac{1}{2})u$

哈密顿函数达到极小值就相当于使性能指标极小，因此要求$(\lambda - \frac{1}{2})u$极小。且取其约束条件的边界值，即$|u(t)| = 1$时，使哈密顿函数 H 达到最小值。所以，最优控制应取

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \lambda > \frac{1}{2} \\ 1, & \lambda < \frac{1}{2} \end{cases}$$

由协态方程 $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda - 1$ 可得 $\lambda(t) = 1 - ce^t$

由横截条件 $\lambda(1) = 0$ 求得 $c = e^{-1}$，于是有

$$\lambda(t) = 1 - e^{t-1}$$

显然，当$\lambda(t_s) = 0.5$时，$u^*(t)$产生切换，其中t_s为切换时间。

不难求得$t_s=\ln\frac{e}{2}$，故最优控制为

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\ln\frac{e}{2}\\ 1, & \ln\frac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

将$u^*(t)$代入状态方程，得

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}-x-1, & 0\le t<\ln\frac{e}{2}\\ -x+1, & \ln\frac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

解得$x(t)=\begin{cases}c_1e^{-t}-1, & 0\le t<\ln\frac{e}{2}\\ c_2e^{-t}+1, & \ln\frac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$

代入初始条件$x(0)=1$，可得 $c_1=2$，因而

$$x(t)=2e^{-t}-1，\quad 0\le t<\ln\frac{e}{2}$$

在上式中，令$t=\ln\frac{e}{2}$，可求出$\ln\frac{e}{2}\le t\le 1$时$x(t)$的初始条件

$$x(\ln\frac{e}{2})=2e^{-\ln\frac{e}{2}}-1=\frac{4}{e}-1$$

从而求得$c_2=2-e$。因而

$$x(t)=(2-e)e^{-t}+1，\quad \ln\frac{e}{2}\le t\le 1$$

于是，最优轨线为$x(t)=\begin{cases}2e^{-t}-1, & 0\le t<\ln\frac{e}{2}\\ (2-e)e^{-t}+1, & \ln\frac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$

将求得的$u^*(t)$和$x^*(t)$代入式 J，得最优性能指标

1 1 $\ln\frac{e}{}$

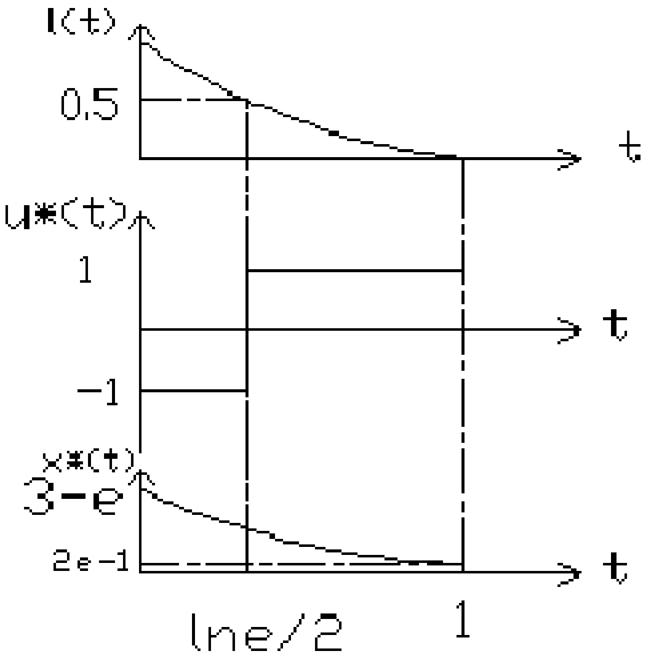
1 $_1$ 1 3 2 e $\overline{2}$ – – – –

$$J^* = \int_0 [x(t) - \quad u(t)]dt = \int_0 {}_2 (2e^{-t} - \quad)dt + \int_{\ln\frac{e}{2}} [\quad + (2-e)e^{-t}]dt = \quad - \quad - \ln \quad \approx 0.45$$

2 2

2 e 2

最优解曲线如下：



最优解曲线

3-5 控制系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1,\ x_1(0)=0,\ x_1(1)=1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2,\ x_2(0),\ x_2(1)=1 \end{cases}$，试求最优控制 $u_1^*(t)$，$u_2^*(t)$ 以及最优轨线 $x_1^*(t)$ 和 $x_2^*(t)$，使性能指标 $J=\int_0^1 \left(x_1(t)+u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt$ 为极小值。

解：哈密尔顿函数为 $H = x_1 + u_1^2 + u_2^2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2(x_1 + u_2)$

由协态方程：$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -(1+\lambda_2) \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \lambda_1 = -(1+c_1)t + c_2 \\ \lambda_2 = c_1 \end{cases}$，

由极值条件：$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u_1} = 2u_1 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_2} = 2u_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} u_1(t) = \dfrac{1}{2}\left[(1+c_1)t - c_2\right] \\ u_2(t) = -\dfrac{1}{2}c_1 \end{cases}$，由状态方程有 $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{2}(1+c_1)t - c_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \dfrac{1}{2}c_1 \end{cases}$，解得

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{4}(1+c_1)t^2 - \dfrac{1}{2}c_2 t + c_3 \\ x_2(t) = \dfrac{1}{12}(1+c_1)t^3 - \dfrac{1}{4}c_2 t^2 + (c_3 - \dfrac{1}{2}c_1)t + c_4 \end{cases},$$

代入初始值解得：$\begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=-2 \\ c_3=0 \\ c_4=0 \end{cases}$，故$\begin{cases} u_1^*(t)=1 \\ u_2^*(t)=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1^*(t)=t \\ x_2^*(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t \end{cases}$

此时$J^*=\int_0^1\left(t+1^2+(\frac{1}{2})^2\right)dt=\frac{7}{4}$

…………………………………………………………………………

……………………………..

3－6 已知二阶系统方程 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$ $x_1(0)=0$ $x_1(t_f)=2$ 式中

$\dot{x}_2(t)=u(t),$ $x_2(0)=0,$ $x_2(t_f)=2,$

$|u(t)|\le 1,t_f$ 自由。试求使性能指标 $J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x_1^2(t)+x_2^2(t)+u^2(t)]dt$ 为极小的最优控制$u^*(t)$，最优轨线$x^*(t)$以及最优指标J^*。

解：本例为线性定常系统，积分型性能指标，t_f自由，末端固定的最优化问题。

构造哈密顿函数为：$H=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$

由极小值条件应取：$u^*(t)=\begin{cases} -1,当\lambda_2(t)>1 \\ -\lambda_2(t)，当|\lambda_2(t)|\le 1 \\ +1,当\lambda_2(t)<-1 \end{cases}$，由哈密顿函数沿最优轨线的变化律：$H^*(t)=H^*(t_f^*)=0$，可得：

$\frac{1}{2}x_1^{*2}(0)+\frac{1}{2}x_2^{*2}(0)+\frac{1}{2}u^{*2}(0)+\lambda_1^*(0)x_2^*(0)+\lambda_2^*(0)u^*(0)=0$，

即：$\frac{1}{2}u^{*2}(0)+\lambda_2^*(0)u^*(0)=0$，可知：$u^*(0)=0$，（其中$u^*(0)=-2\lambda_2^*(0)$矛盾），

由协态方程有：$\begin{cases} \dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-x_1 \\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-x_2-\lambda_1 \end{cases}$，由初始条件$\lambda_2(0)=0$解得：

λ_2（t）=-$\sqrt{Ae^{\frac{t}{2}}\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t}$，由所给状态方程及初始条件解得：

………………………………………………………………………………

…………………………………

3-7 已知二阶系统方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)+\frac{1}{4},\quad x_1(0)=-\frac{1}{4}$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t),\quad x_2(0)=-\frac{1}{4}$$

式中控制约束为

$$|u(t)|\le\frac{1}{2}$$

试确定最优控制$u^*(t)$。将系统在t_f时刻由$x(0)$转移到空间原点，并使性能指标

$$J=\int_0^{t_f}u^2(t)dt$$

取最小值，其中t_f自由。

解：由题可知

构造哈密顿函数：

$$H=u^2+\lambda_1(x_2+\frac{1}{4})+\lambda_2u=(u+\frac{1}{2}\lambda_2)^2-\frac{1}{4}\lambda_2^2+\lambda_1(x_2+\frac{1}{4})$$

按照最小值原理，最优控制应取

$$u^*(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & \lambda_2>1\\ -\frac{1}{2}\lambda_2, & |\lambda_2|\le 1\\ \frac{1}{2}, & \lambda_2<-1\end{cases}$$

由哈密顿函数沿最优轨线的变化规律 $H^*(t)=H^*(t_f^*)=0$ 可

得

$$u^{*2}(0)+\lambda_1(0)[x_2^*(0)+\frac{1}{4}]+\lambda_2(0)u^*(0)=0$$

以及 $u^{*2}(t_f^*)+\lambda_1(t_f^*)[x_2^*(t_f^*)+\frac{1}{4}]+\lambda_2(t_f^*)u^*(t_f^*)=0$

因为$x_2(0)=-\frac{1}{4}$，可以求出$u^*(0)=0$

由协态方程 $\dot{\lambda}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$

$$\dot{\lambda}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1(t)$$

解得 $\lambda_1(t)=c_1$，$\lambda_2(t)=-c_1t+c_2$

当 $u^*(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t)=\frac{1}{2}c_1t-\frac{1}{2}c_2$ 时（试取）

$$x_1(t)=\frac{1}{12}c_1t^3-\frac{1}{4}c_2t^2+c_3t+c_4+\frac{1}{4}t$$

$$x_2(t)=\frac{1}{4}c_1t^2-\frac{1}{2}c_2t+c_3$$

代入初始条件$x_1(0)=-\frac{1}{4}$，$x_2(0)=-\frac{1}{4}$，可得 $c_3=c_4=-\frac{1}{4}$

代入末端条件$x(t_f)=0$，可得$\begin{cases} x_1(t)=\frac{1}{12}c_1t_f^3-\frac{1}{4}c_2t_f^2-\frac{1}{4} \\ x_2(t)=\frac{1}{4}c_1t_f^2-\frac{1}{2}c_2t_f-\frac{1}{4} \end{cases}$

又$H(t_f)=u^2(t_f)+\lambda_1(t_f)[x_2(t_f)+\frac{1}{4}]+\lambda_2(t_f)u(t_f)=0$，联立解得$\begin{cases} c_1=\frac{1}{9} \\ c_2=0 \\ t_f=3 \end{cases}$

于是有 $\lambda_2(t)=-\frac{1}{9}t$ $\begin{cases} \lambda_2=1, & t<0 \\ \lambda_2=-1, & t=9 \end{cases}$

在$0\le t\le 3$时，正好满足$|\lambda_2|\le 1$要求

故最优控制为 $u^*(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t)=\frac{1}{18}t$，$(0\le t\le 3)$

相应的最优性能指标为 $J^*=\int_0^3 u^{*2}(t)dt=\int_0^3(\frac{1}{18}t)^2dt=\frac{1}{36}$

最优轨线为$\begin{cases} x_1^*(t)=\dfrac{1}{108}t^3-\dfrac{1}{4} \\ x_2^*(t)=\dfrac{1}{36}t^2-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

3-17 已知系统方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}$，$\begin{matrix}x_1(0)=1 \\ x_2(0)=0\end{matrix}$，性能指标 $J=\dfrac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$，末端 $x_1(1)=x_2(1)=0$。试用连续极小值原理求最优控制 $u^*(t)$ 与最优轨迹 $x^*(t)$。

解：构造哈密顿函数：$H=L+\lambda^T f=\dfrac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$，由协态方程：$\begin{matrix}\dot{\lambda}_1(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0 \\ \dot{\lambda}_2(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=-\lambda_1\end{matrix}$，解得：$\begin{cases}\lambda_1=c_1 \\ \lambda_2=-c_1 t+c_2\end{cases}$，由极值条件：$\dfrac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$，

解得 $u(t)=-\lambda_2(t)=c_1 t-c_2$，代入状态方程有：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=c_1 t-c_2\end{cases}$，解得

$\begin{cases}x_1(t)=\dfrac{1}{6}c_1 t^3-\dfrac{1}{2}c_2 t^2+c_3 t+c_4 \\ x_2(t)=\dfrac{1}{2}c_1 t^2-c_2 t+c_3\end{cases}$，代入初始值解得：$\begin{cases}c_1=12 \\ c_2=6 \\ c_3=0 \\ c_4=1\end{cases}$，故最优轨线为：$\begin{cases}x_1^*(t)=2t^3-3t^2+1 \\ x_2^*(t)=6t^2-6t\end{cases}$，又 $\dot{x}_2^*(t)=12t-6$，所以最优控制律为：

$u^*(t)=12t-6$，

此时 $J^*=\dfrac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^1(12t-6)^2 dt=6$

3-28 已知系统的状态方程 $\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{matrix}$，控制约束为（t）$|\le 1$。试求最优控制 u*（t），使系统由任意初态最快地转移到 $x_1(t_f)=2$，$x_2(t_f)=1$ 的末态。写出开关曲线方程，并绘出开关曲线的图形。

解：本例为二次积分模型的最小时间控制问题。容易判定系统可控，因而必为控制。构造哈密顿函数：$H=1+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

由 协态方程得：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}\lambda_1(t) = c_1 \\ \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2\end{cases}$。

$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{\lambda_2(t)\} = \begin{cases}-1 & ,\lambda_2(t) > 0 \\ 1 & ,\lambda_2(t) < 0\end{cases}$，知最优控制 u(t)最多切换一次，

具有四种可能：【+1】，【-1】，【+1，-1】，【-1，+1】。

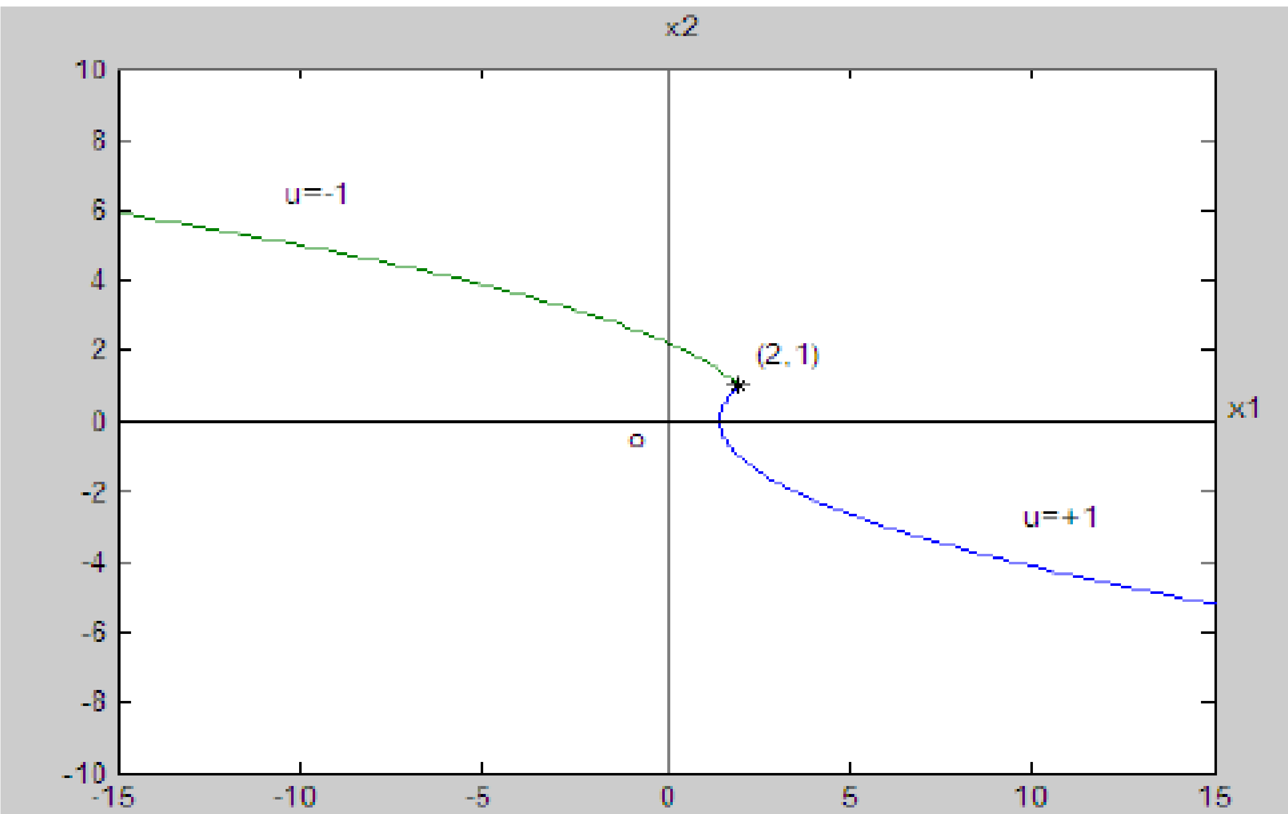
①若 $u^*(t)=1$ 时，代入状态方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1\end{cases}$ 考虑到初始状态 (x_{10}, x_{20})，

解得：$\begin{cases}x_1 = \dfrac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2 = t + x_{20}\end{cases}$，消 t 得：$x_1 = \dfrac{1}{2}x_2^2 + x_{10} - \dfrac{1}{2}x_{20}^2$，

②同理，若 $u^*(t) = -1$ 时，解得：$x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \dfrac{1}{2}x_{20}^2$，由末态配置

到 $\begin{cases}x_1(t_f) = 2 \\ x_2(t_f) = 1\end{cases}$，取开关曲线为过（2, 1）的那条曲线，即开关曲线

方程为：$\gamma : \begin{cases}x_1 = \dfrac{1}{2}x_2^2 + \dfrac{3}{2}, (x_2 < 1), \gamma_+ \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_2^2 + \dfrac{5}{2}, (x_2 > 1), \gamma_-\end{cases}$ 开关曲线图如下：



开关曲线$_\gamma$