

专题 9.13 中心对称图形——平行四边形全章十六类必考压轴题

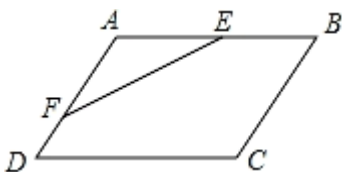
【苏科版】

必考点 1

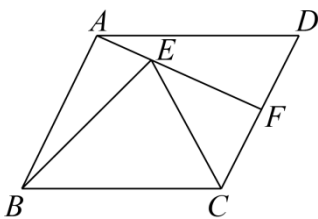
平行四边形中边的关系运用



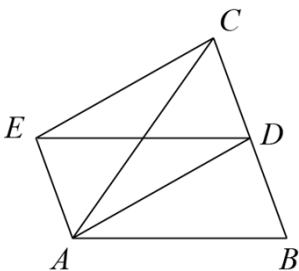
1. (2022 秋·浙江宁波·八年级校考期末) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=4$, $\angle A=120^\circ$, E 是 AB 的中点, 点 F 在平行四边形 $ABCD$ 的边上, 若 $\triangle AEF$ 为等腰三角形, 则 EF 的长为_____.



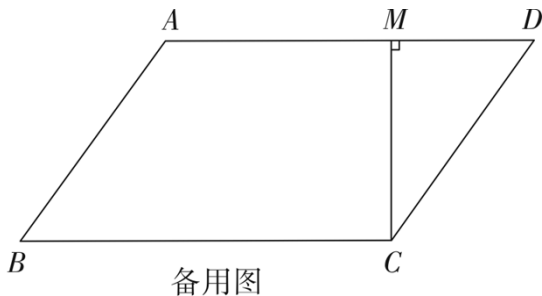
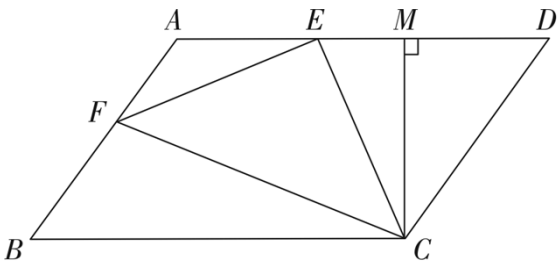
2. (2022 秋·黑龙江哈尔滨·九年级统考期中) 如图, 已知 $\square ABCD$ 中, AF 垂直平分 DC , 且 $AF=DC$, 点 E 为 AF 上一点, 连接 BE 、 CE , 若 $\angle CEF=2\angle ABE$, $AE=2$, 则 AD 的长为_____.



3. (2022 秋·陕西宝鸡·九年级统考期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC=10$, $AC=12$, D 是 BC 边上任意一点, 连接 AD , 以 AD , CD 为邻边作平行四边形 $ADCE$, 连接 DE , 则 DE 长的最小值为_____.



4. (2022 春·江西吉安·八年级统考期末) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle D < 90^\circ$, 点 E 在 AD 边上, $CM \perp AD$, 垂足为 M , 以 CE 为边, E 为直角顶点, 作等腰直角 $\triangle CEF$, 使点 F 落在射线 AB 上.



(1)当 $\triangle CED$ 是边长为 6 的等边三角形时, $\angle AFE$ 的度数为_____, AD 的长为_____;

(2)当 $AE = ED$ 时, 求 $\angle ECD$ 的度数;

(3)是否存在 $AF = BF$ 的情况, 如果存在, 求 AE , ED 和 CM 之间满足的数量关系; 如果不存在, 说明理由.

5. (2022 春·广东清远·八年级统考期末) 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 O 是对角线 BD 的中点, 点 E 在边 BC 上, EO 的延长线与边 AD 交于点 F , 连接 BF 、 DE 如图 1.

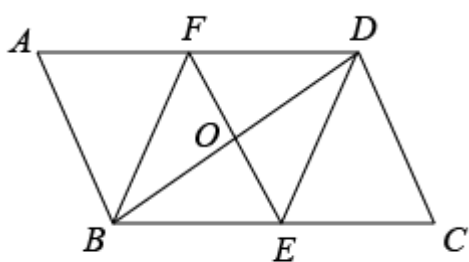


图1

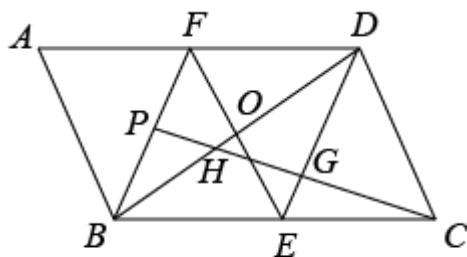


图2

(1)求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;

(2)若 $DE = DC$, $\angle CBD = 45^\circ$, 过点 C 作 DE 的垂线, 与 DE 、 BD 、 BF 分别交于点 G 、 H 、 P 如图 2.

①当 $CD = 6$, $CE = 4$ 时, 求 BE 的长;

②求证: $CD = CH$.

6. (2022 秋·湖北·九年级统考期中) 如图, 点 P 是 $\square ABCD$ 内一点, $\angle BPC = 90^\circ$, $\angle BAD - \angle PCD = 45^\circ$

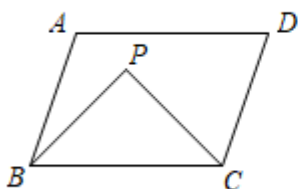


图1

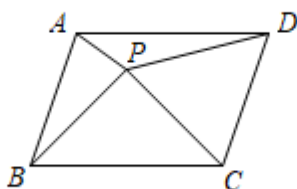


图2

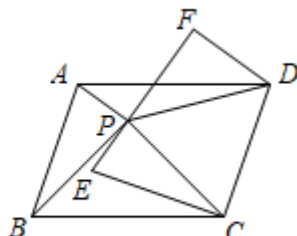


图3

(1)如图 1, 求证: $PB = PC$;

(2)如图 2, 若 $AB = 8$, $PC = 5\sqrt{2}$, 且 $S_{\triangle ABP} : S_{\triangle PCD} = 1 : 3$, 求 $\square ABCD$ 的面积;

(3)如图 3, 将 $\triangle PBA$ 绕点 P 旋转至 $\triangle PCE$ 处, 过 D 作 $DF \perp EP$, 交 EP 延长线于 F , 若 $AB = \sqrt{6}AP$,

$\angle PAB = 75^\circ$, 直接写出 $\frac{PF}{PD}$ 的值为_____.

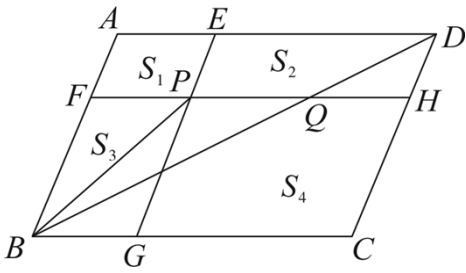
必考点 2

平行四边形中的面积转换



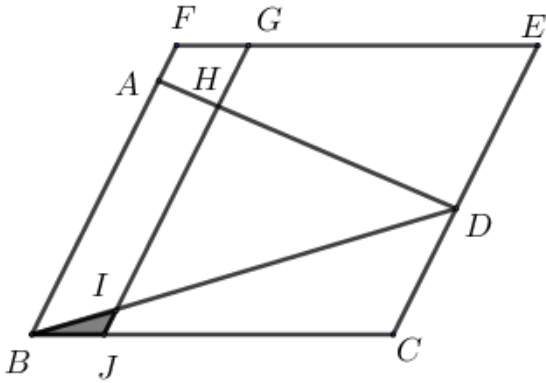
1. (2022·浙江·九年级专题练习) 如图, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别在 $\square ABCD$ 的 AD 、 AB 、 BC 、 CD 边上, $EG \parallel CD$, $FH \parallel AD$, EG 与 FH 交于点 P , 连接 BD 交 FH 于点 Q , 连接 BP , 设 $\square AEPF$ 、 $\square EDHP$ 、 $\square FPGB$ 、 $\square PHCG$

的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，若 $\square AEPF \sim \square PHCG$ ，则只需知道（ ），就能求 $\triangle BPQ$ 的面积。



- A. $S_2 - S_1$ B. $S_3 - S_1$ C. $S_4 - S_1$ D. $S_4 - S_3$

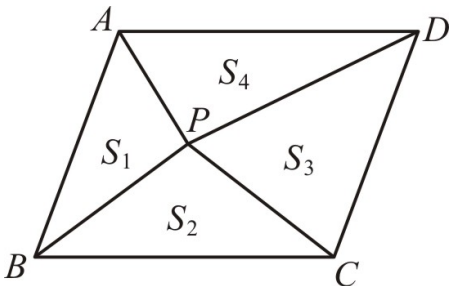
2. (2022 秋·浙江宁波·九年级统考期末) 如图，在平行四边形 $FBCE$ 中，点 J 、 G 分别在边 BC 、 EF 上， $JG \parallel BF$ ，四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $HGFA$ ，相似比 $k = 3$ ，则下列一定能求出 $\triangle BIJ$ 面积的条件（ ）



- A. 四边形 $HDEG$ 和四边形 $AHGF$ 的面积之差 B. 四边形 $ABCD$ 和四边形 $HDEG$ 的面积之差
C. 四边形 $ABCD$ 和四边形 $ADEF$ 的面积之差 D. 四边形 $JCDH$ 和四边形 $HDEG$ 的面积之差

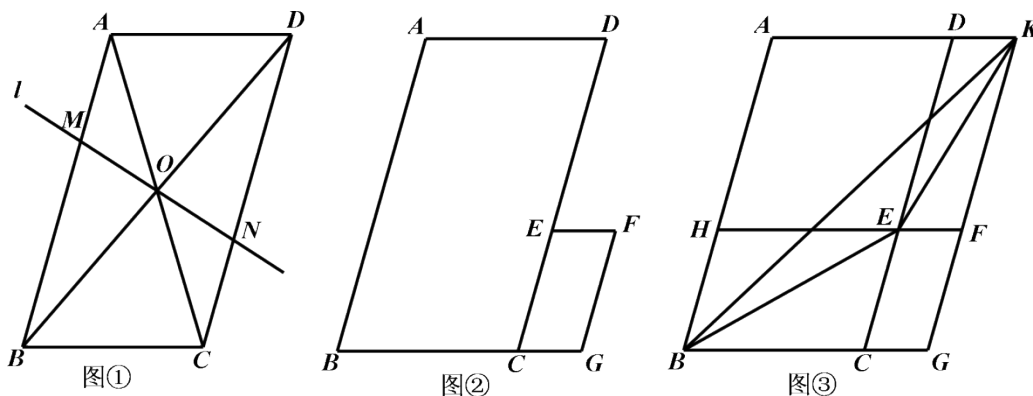
3. (2022 春·浙江·八年级阶段练习) 如图，点 P 是 $\square ABCD$ 内的任意一点，连接 PA 、 PB 、 PC 、 PD ，得到 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PDA$ ，设它们的面积分别是 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，给出如下结论中正确的是 _____。

- ① $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ ； ②如果 $S_4 > S_2$ ，则 $S_3 > S_1$ ； ③若 $S_3 = 2S_1$ ，则 $S_4 = 2S_2$ ； ④如果 P 点在对角线 BD 上，则 $S_1 : S_4 = S_2 : S_3$ ； ⑤ $S_1 - S_2 = S_3 - S_4$ ，则 P 点一定在对角线 BD 上。



4. (2022 秋·上海·七年级校考期末) 小明在学习了中心对称图形以后，想知道平行四边形是否为中心对称图形。于是将一张平行四边形纸片平放在一张纸板上，在纸板上沿四边画出它的初始位置，并画出平行四

边形纸片的对角线，用大头针钉住对角线的交点．将平行四边形纸片绕着对角线的交点旋转 180° 后，平行四边形纸片与初始位置的平行四边形恰好重合．通过上述操作，小明惊喜地发现平行四边形是中心对称图形，对角线的交点就是对称中心．请你利用小明所发现的平行四边形的这一特征完成下列问题：



(1)如图①，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ．过点 O 的直线 l 与边 AB 、 CD 分别相交于点 M 、 N ，四边形 $AMND$ 的面积与平行四边形 $ABCD$ 的面积之比为_____；

(2)如图②，这个图形是由平行四边形 $ABCD$ 与平行四边形 $ECGF$ 组成的，点 E 在边 CD 上，且 B 、 C 、 G 在同一直线上．

①请画出一条直线把这个图形分成面积相等的两个部分（不要求写出画法，但请标注字母并写出结论）；

②延长 GF 与边 AD 的延长线交于点 K ，延长 FE 与边 AB 交于点 H ．联结 EB 、 EK 、 BK ，如图③所示，当四边形 $AHED$ 的面积为 10 ，四边形 $CEFG$ 的面积为 2 时，求三角形 EBK 的面积．

5. （2022 秋·吉林长春·八年级统考期末）定义：我们把三角形被一边中线分成的两个三角形叫做“朋友三角形”．性质：“朋友三角形”的面积相等．

例如：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，如果 AD 是 AB 边上的中线，那么 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 是“朋友三角形”，则有

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD}.$$

应用：如图 2，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，点 F 在 BC 上， $AE=BF$ ， AF 与 BE 交于点 O ．

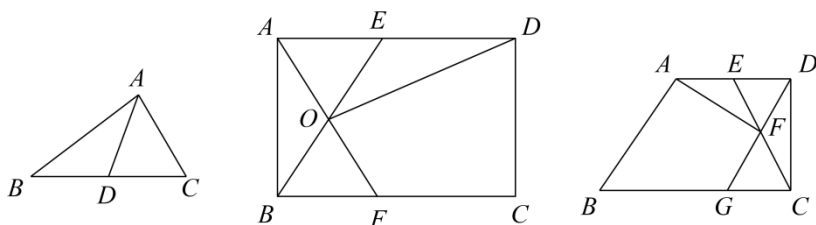


图 1

图 2

图 3

(1)求证： $\triangle AOE$ 和 $\triangle AOB$ 是“朋友三角形”．

(2)如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = DC = 8$ ， $BC = 12$ ，点 G 在 BC 上，点 E 在 AD 上，

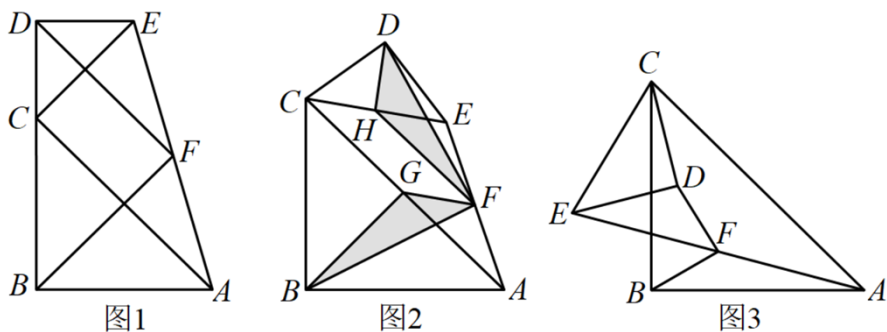
DG 与 CE 交于点 F , $GF = DF$.

①求证: $\triangle DFE$ 和 $\triangle DFC$ 是“朋友三角形”;

②连接 AF , 若 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEF$ 是“朋友三角形”, 求四边形 $ABGF$ 的面积.

(3)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 8$, 点 D 在线段 AB 上, 连接 CD , $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 是朋友三角形”, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 所在直线翻折, 得到 $\triangle A'CD$, 若 $\triangle A'CD$ 与 $\triangle ABC$ 重合部分的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____ (请直接写出答案).

6. (2022秋·重庆大足·九年级统考期末)如图1, 两个等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle EDC$ 的顶点 C 重合, 其中 $\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$, 连接 AE , 取 AE 中点 F , 连接 BF, DF .



(1)如图1, 当 B 、 C 、 D 三个点共线时, 请猜测线段 BF 、 FD 的数量关系, 并证明;

(2)将 $\triangle EDC$ 绕着点 C 顺时针旋转一定角度至图2位置, 根据“ AE 中点 F ”这个条件, 想到取 AC 与 EC 的中点 G 、 H , 分别与点 F 相连, 再连接 BG, DH , 最终利用 $\triangle BGF \cong \triangle FHD$ (SAS)证明了(1)中的结论仍然成立. 请你思考当 $\triangle EDC$ 绕着点 C 继续顺时针旋转至图3位置时, (1)中的结论是否仍然成立? 若成立, 请证明你的结论; 若不成立, 请说明理由;

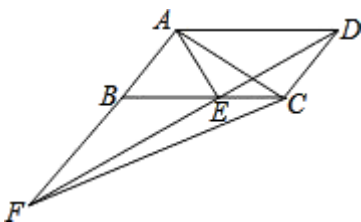
(3)连接 BD , 在 $\triangle EDC$ 绕点 C 旋转一周的过程中, $\triangle BFD$ 的面积也随之变化. 若 $AC = 5\sqrt{2}, CB = 3\sqrt{2}$, 请直接写出 $\triangle BFD$ 面积的最大值.

必考点 3

平行四边形中的角度转换

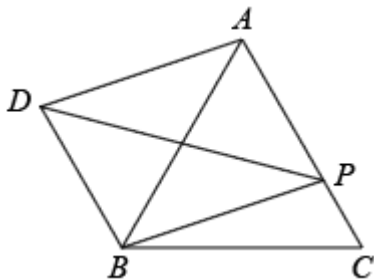


1. (2022春·江西新余·八年级新余四中校考期中)如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$, 交 BC 于点 E , 且 $AB = AE$, 延长 AB 与 DE 的延长线交于点 F . 下列结论中: ① $\triangle ABE$ 是等边三角形; ② $\triangle ABC \cong \triangle EAD$; ③ $AD = AF$; ④ $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDF}$; ⑤ $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CEF}$ 其中正确的是 ()

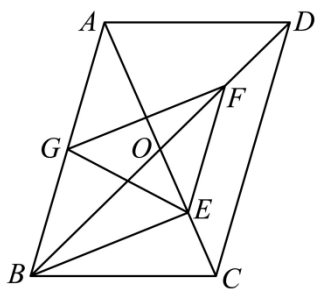


- A. ①②③ B. ①④⑤ C. ①②⑤ D. ②③④

2. (2022 春·江苏南京·八年级统考期中) 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB = 4$, P 为 AC 上一点 (与点 A 、 C 不重合), 连接 BP , 以 PA 、 PB 为邻边作平行四边形 $PADB$, 则 PD 的取值范围是_____.



3. (2022 秋·辽宁朝阳·九年级校考期中) 如图, $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于 O , $BD = 2AD$, E , F , G 分别是 OC , OD , AB 的中点, 下列结论① $BE \perp AC$; ② 四边形 $BEFG$ 是平行四边形; ③ $EG = GF$; ④ EA 平分 $\angle GEF$. 其中正确的是_____.



4. (2022 春·浙江·八年级期末) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle B = \angle D$, 点 E 为 BC 延长线上一点, 连接 AE , AE 交 CD 于 H . $\angle DCE$ 的平分线交 AE 于 G .

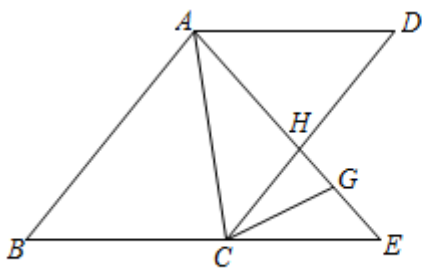


图1

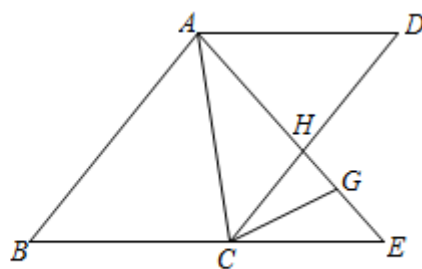


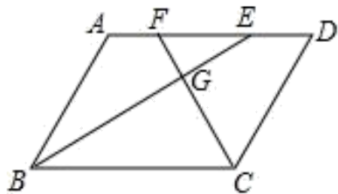
图2

- (1) 求证: 四边形 $ABCD$ 为平行四边形;
 - (2) 如图 1, 若 $AB = 2AD = 10$, H 为 CD 的中点, $HE = 6$, 求 AC 的长;
 - (3) 如图 2, 若 $\angle BAC = \angle DAE$
 - ① $\angle AGC = 2\angle CAE$, 求 $\angle CAE$ 的度数;
 - ② $\angle AGC = n\angle CAE$, $\angle CAE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (用含有 n 的式子表示)
5. (2022 春·浙江杭州·八年级统考期末) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$, $\angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于点 E ,

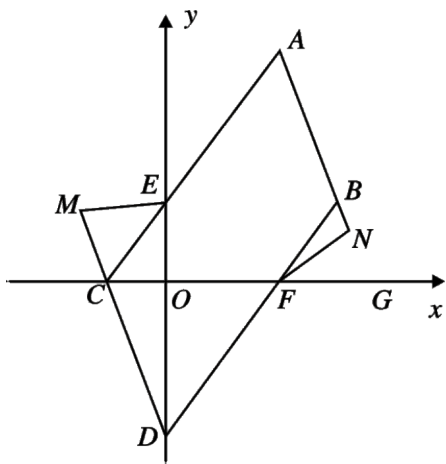
F , BE , CF 相交于点 G .

(1) 求证: $BE \perp CF$;

(2) 若 $AB=a$, $CF=b$, 求 BE 的长.



6. (2022 春·湖北武汉·七年级统考期末) 在平面直角坐标系中, 点 $A(a, 6)$, $B(4, b)$,



(1) 若 a, b 满足 $(a+b-5)^2 + |2a-b-1| = 0$,

① 求点 A, B 的坐标;

② 点 D 在第一象限, 且点 D 在直线 AB 上, 作 $DC \perp x$ 轴于点 C , 延长 DC 到 P 使得 $PC=DC$, 若 $\triangle PAB$ 的面积为 10, 求 P 点的坐标;

(2) 如图, 将线段 AB 平移到 CD , 且点 C 在 x 轴负半轴上, 点 D 在 y 轴负半轴上, 连接 AC 交 y 轴于点 E , 连接 BD 交 x 轴于点 F , 点 M 在 DC 延长线上, 连 EM , $3\angle MEC + \angle CEO = 180^\circ$, 点 N 在 AB 延长线上, 点 G 在 OF 延长线上, $\angle NFG = 2\angle NFB$, 请探究 $\angle EMC$ 和 $\angle BNF$ 的数量关系, 给出结论并说明理由.

必考点 4

平行四边形中勾股定理的运用



1. (2022 春·浙江温州·八年级统考期中) 如图, 一副三角板如图1放置, $AB=CD=\sqrt{6}$, 顶点 E 重合, 将 $\triangle DEC$ 绕其顶点 E 旋转, 如图2, 在旋转过程中, 当 $\angle AED=75^\circ$, 连接 AD, BC , 这时 $\triangle ADE$ 的面积是_____.

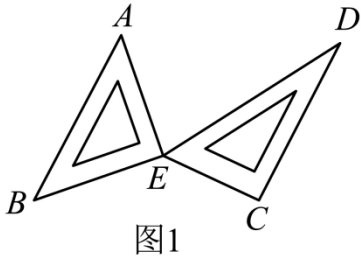


图1

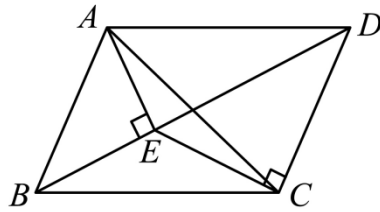
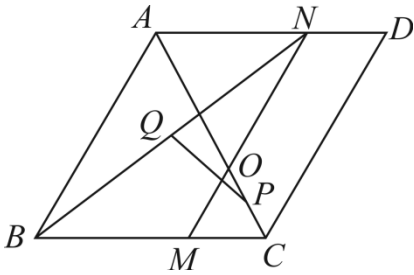
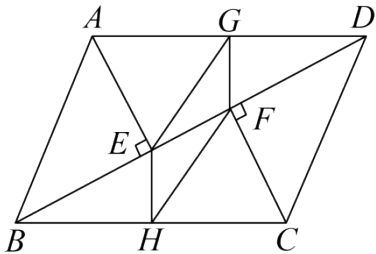


图2

2. (2022 春·广西贵港·八年级统考期中) 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $AB=3$, $\angle ABC=60^\circ$, 点 M 为 BC 边上一点且 $BM=2CM$, 过 M 作 $MN\parallel AB$ 交 AC , AD 于点 O , N , 连接 BN . 若点 P , Q 分别为 OC , BN 的中点, 则 PQ 的长度为_____.



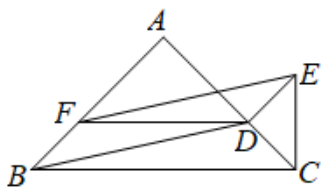
3. (2022 春·江苏南京·八年级校考期中) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, G , H 分别是 AD , BC 的中点, $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E , F .



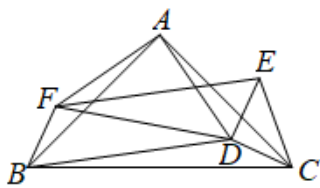
(1) 求证: 四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

(2) 若 $AB=4$, $BC=7$, 当四边形 $GEHF$ 是矩形时 BD 的长为_____.

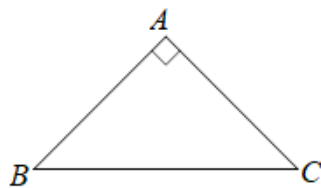
4. (2022 秋·辽宁辽阳·九年级校考期中) 如图, 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点 D 为平面内一点, 以 CD 为腰在 CD 右侧作等腰 $Rt \triangle CDE$, 且 $\angle CDE=90^\circ$, 过点 B 作 $BF \parallel DE$, 且 $BF=DE$, 连接 BD , DF , EF .



图①



图②



备用图

- (1)如图①, 当点 D 在 AC 边上时, 直接写出线段 AF 与 AD 的关系为_____;
- (2)将图①中的等腰 $Rt \triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转 $\alpha(0^\circ < \alpha < 45^\circ)$ 到图②的位置, 连接 AD, AF , (1)中的结论是否仍然成立? 若成立, 请写出证明过程; 若不成立, 请说明理由;
- (3)若 $AD = 3, AC = 5$, 当 A, E, F 三点在一条直线上时, 请直接写出 CD 的长.

5. (2022 春·广东广州·八年级广州市南武中学校考期中) 如图:

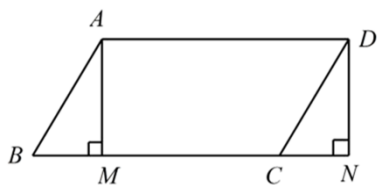


图1

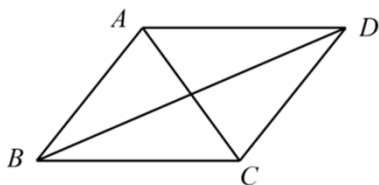


图2

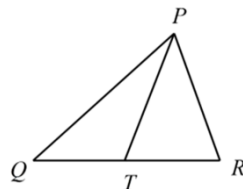
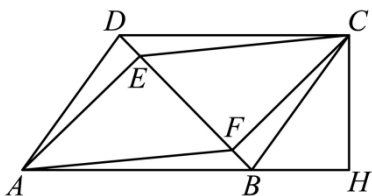


图3

- (1)如图 1, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AM \perp BC$ 于 $M, DN \perp BC$ 于 N . 求证: $BM = CN$.
- (2)如图 2, 平行四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 是两条对角线, 求证: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
- (3)如图 3, PT 是 $\triangle PQR$ 的中线, 已知: $PQ = 7, QR = 6, RP = 5$. 求: PT 的长度.
6. (2022 春·广东深圳·八年级深圳中学校考期中) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, BD 是它的一条对角线, 过 A, C 两点分别作 $AE \perp BD, CF \perp BD, E, F$ 为垂足.

(1) 求证: 四边形 $AFCE$ 是平行四边形;

(2) 若 $AD = 13\text{cm}, AE = 12\text{cm}, AB = 20\text{cm}$, 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H , 求 CH 的长.



必考点 5

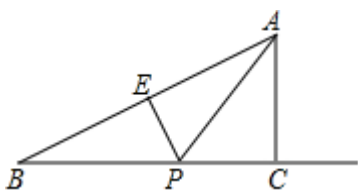
平行四边形中的多解问题



1. (2022 春·浙江杭州·八年级期末) 平行四边形的一边长为 12, 那么这个平行四边形的两条对角线的长可能是 ()
- A. 8 和 12 B. 9 和 13 C. 12 和 12 D. 11 和 14

2. (2022 春·浙江杭州·八年级统考期末) 已知: 一组邻边分别为 6cm 和 10cm 的平行四边形 $ABCD$, $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线分别交 CD 所在直线于点 E, F , 则线段 EF 的长为_____ cm .

3. (2022 春·辽宁沈阳·八年级沈阳市第一二六中学校考期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AC = 4$, E 为斜边 AB 的中点, 点 P 是射线 BC 上的一个动点, 连接 AP, PE , 将 $\triangle AEP$ 沿着边 PE 折叠, 折叠后得到 $\triangle EPA'$, 当折叠后 $\triangle EPA'$ 与 $\triangle BEP$ 的重叠部分的面积恰好为 $\triangle ABP$ 面积的四分之一, 则此时 BP 的长为_____.



4. (2022 秋·河南郑州·九年级校考期末) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O , 点 E 为 BD 上的一个动点, 连接 CE 并延长到点 F , 使 $EF = CE$, 连接 AF .

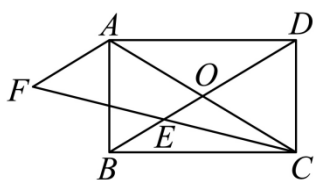


图1

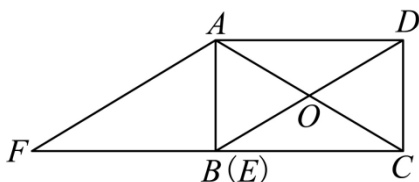


图2

(1) 若点 E 与点 B 重合(如图 2), 判断 AF 与 BD 的数量关系和位置关系, 并说明理由;

(2) 若以 A, F, B, E 为顶点的四边形是平行四边形, $BD = 3$, 请直接写出线段 BE 的长度.

5. (2022 春·四川成都·八年级四川省成都市七中育才学校校考期末) 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 其边长为 4. 点 P 是 AB 边上一动点, 连接 CP .

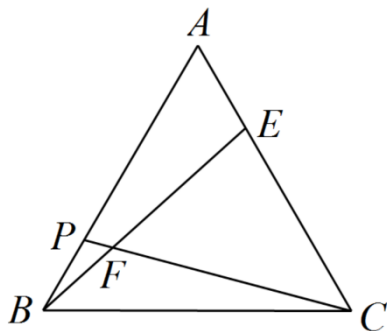


图1

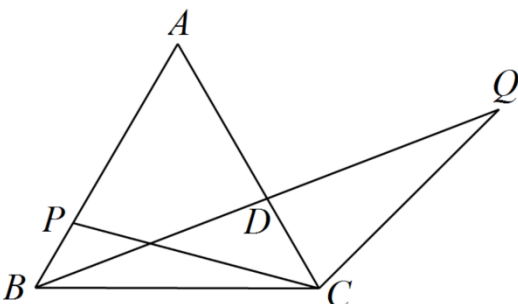


图2

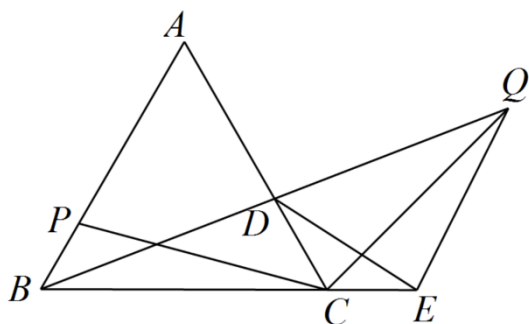


图3

(1)如图 1, 点 E 在 AC 边上且 $AE=BP$, 连接 BE 交 CP 于点 F .

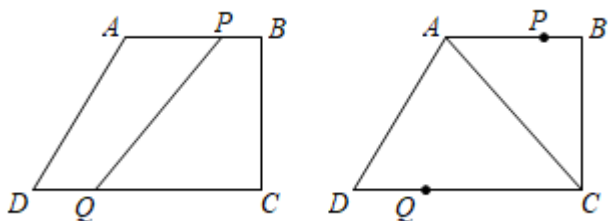
①求证: $BE=CP$; ②求 $\angle BFC$ 的度数;

(2)如图 2, 将线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 120° 得线段 CQ , 连接 BQ 交 AC 于点 D . 设 $BP=x$, $CD=y$, 求 y 与 x 的函数关系式;

(3)如图 3, 在 (2) 的条件下, 延长 BC 至点 E , 且 $CE=BP$, 连接 QE , DE . 在点 P 运动过程中, 当 $\triangle CEQ$ 的周长为 $4 + \sqrt{13}$ 时, 求 DE 的长.

6. (2022 春·浙江杭州·八年级期末) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BCD = 90^\circ$,

$AB = AD = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 P 从点 B 出发, 沿线段 BA , 向点 A 以 2cm/s 的速度匀速运动; 点 Q 从点 D 出发, 沿线段 DC 向点 C 以 3cm/s 的速度匀速运动, 已知两点同时出发, 当一个点到达终点时, 另一点也停止运动, 设运动时间为 $t(\text{s})$.



(1) 连结 P 、 Q 两点, 则线段 PQ 长的取值范围是_____;

(2) 当 $PQ = 10\text{cm}$ 时, 求 t 的值;

(3) 若在线段 CD 上有一点 E , $QE = 2\text{cm}$, 连结 AC 和 PE . 请问是否存在某一时刻使得 AC 平分 PE ? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

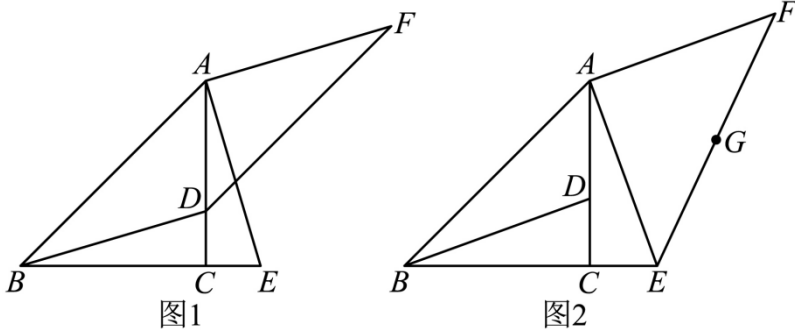
必考点 6

平行四边形中的动点问题



1. (2022 秋·广东广州·九年级广州四十七中校考期末) 如图 1, $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, D 为 CA 上一动点, E 为 BC 延长线上的动点, 始终保持 $CE = CD$. 连接 BD 和 AE , 将 AE 绕 A 点逆时针旋转 90° 到

AF, 连接DF.



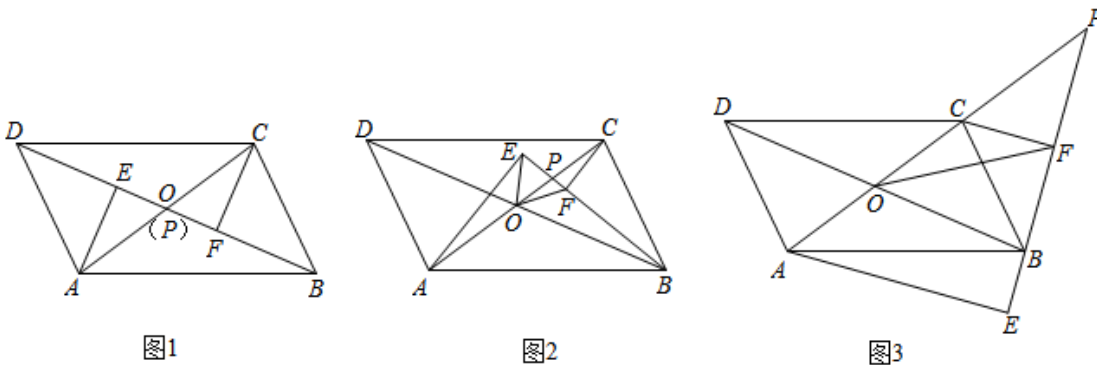
(1)请判断线段BD和AF的位置关系并证明;

(2)当 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4}BD^2$ 时, 求 $\angle AEC$ 的度数;

(3)如图2, 连接EF, G为EF中点, $AB = 2\sqrt{2}$, 当D从点C运动到点A的过程中, EF的中点G也随之运动, 请求出点G所经过的路径长.

2. (2022春·贵州遵义·八年级校考期末)如图, 点P是 $\square ABCD$ 对角线AC所在直线上的一个动点(点P不与点A、C重合), 分别过点A、C向直线BP作垂线, 垂足分别为点E、F, 点O为AC的中点.

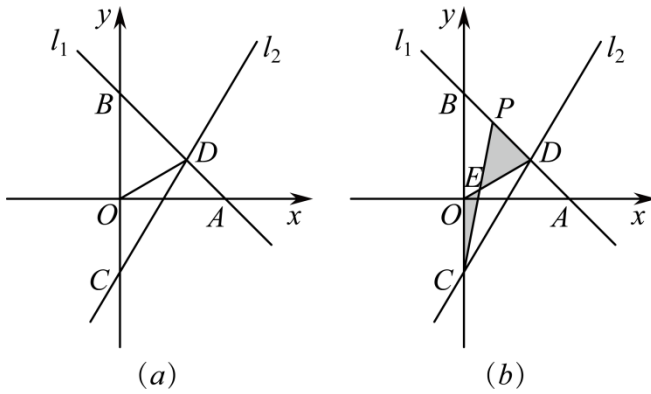
(1)当点P与点O重合时如图1, 线段OE与线段OF的数量关系是_____.



(2)如图2, 点P在OC上运动时(不与点O与C重合), (1)中的结论是否成立?

(3)点P在OC的延长线上运动时, 当 $\angle OFE = 60^\circ$ 时, 如图3的位置, 猜想线段CF、AE、OE之间有怎样的数量关系?

3. (2022春·四川泸州·八年级统考期末)如图(a), 直线 $l_1: y = kx + b$ 经过点A、B, $OA = OB = 3$, 直线 $l_2: y = \frac{3}{2}x - 2$ 交y轴于点C, 且与直线 l_1 交于点D, 连接OD.



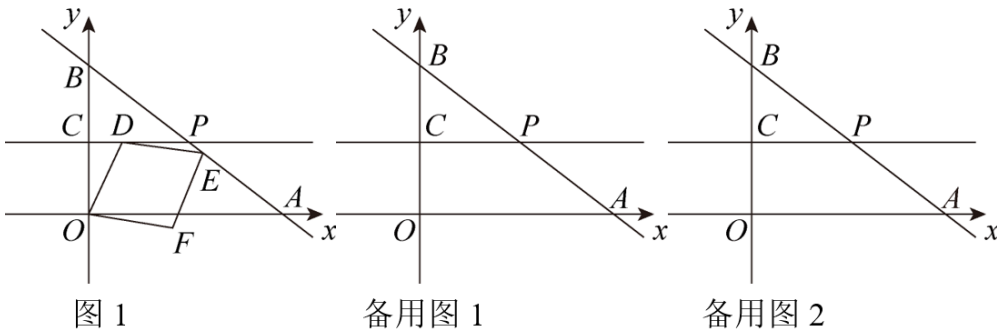
(1)求直线 l_1 的解析式;

(2)求 $\triangle OCD$ 的面积;

(3)如图(b), 点 P 是直线 l_1 上的一动点, 连接 CP 交线段 OD 于点 E , 当 $\triangle COE$ 与 $\triangle DEP$ 的面积相等时, 求点 P 的坐标;

(4)在(3)的条件下, 若点 H 为坐标平面内任意一点, 在坐标平面内是否存在这样的点 H , 使以 D 、 C 、 P 、 H 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出点 H 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

4. (2022春·吉林四平·八年级统考期末) 如图1, 直线 $y=kx+b$ 分别交 x 轴, y 轴于点 A , 点 B , 点 C 、 P 分别是线段 OB , AB 的中点, 且 $OC = \frac{3}{2}$, $CP=2$, 动点 D , E 分别在直线 CP 和线段 AB 上, 设点 E 的横坐标为 m , 线段 CD 的长为 n ($n>0$), 且 $m+n=3$, 以 DO , DE 为邻边作平行四边形 $ODEF$.

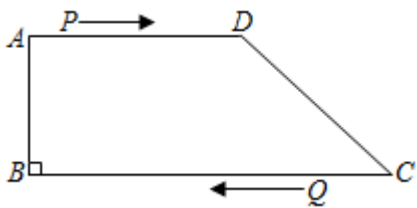


(1)求出直线 AB 的解析式.

(2)当 $n=1$ 时, 请求出点 F 的坐标.

(3)当点 F 落在 $\triangle AOB$ 的边 OB 或 AB 上时, 求直接写出点 F 的坐标.

5. (2022春·广东江门·八年级校考期中) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$, $AD = 12\text{cm}$, $BC = 18\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 以 1cm/s 的速度向点 D 运动, 点 Q 从点 C 同时出发, 以 2cm/s 的速度向点 B 运动. 规定其中一个动点到达端点时, 另一个动点也随之停止运动. 设点 P , Q 运动的时间为 ts .

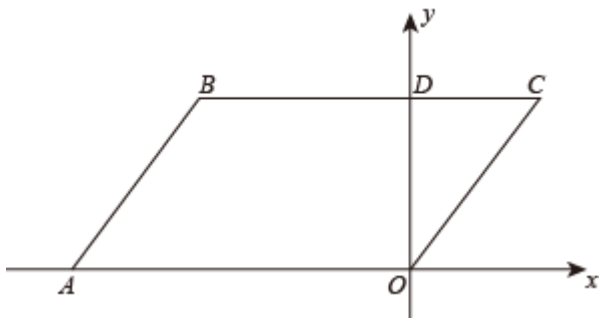


(1) CD 边的长度为_____cm, t 的取值范围为_____.

(2) 从运动开始, 当 t 取何值时, $PQ \parallel CD$?

(3) 从运动开始, 当 t 取何值时, $PQ = CD$?

6. (2022 春·浙江温州·八年级校考期中) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 $ABCO$ 是平行四边形, O 为坐标原点, 点 A 的坐标是 $(-16, 0)$, 线段 BC 交 y 轴于点 D , 点 D 的坐标是 $(0, 8)$, 线段 $CD=6$. 动点 P 从点 O 出发, 沿射线 OA 的方向以每秒 2 个单位的速度运动, 同时动点 Q 从点 D 出发, 以每秒 1 个单位的速度向终点 B 运动, 当点 Q 运动到点 B 时, 点 P 随之停止运动, 运动时间为 t 秒.



(1) 用 t 的代数式表示: $BQ=$ _____, $AP=$ _____;

(2) 若以 A, B, Q, P 为顶点的四边形是平行四边形时, 求 t 的值;

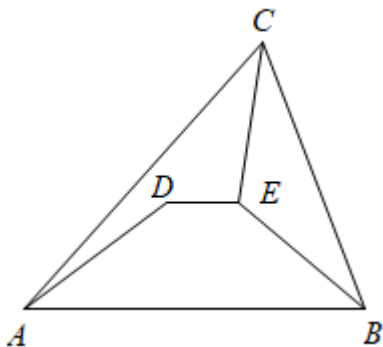
(3) 当 $\triangle BQP$ 恰好是等腰三角形时, 求 t 的值.

必考点 7

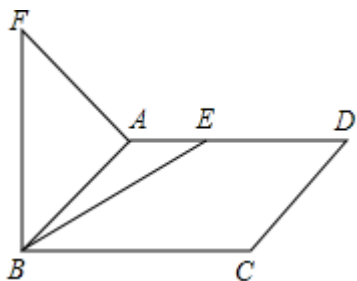
平行四边形中的最值问题



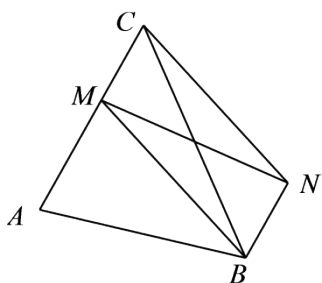
1. (2022 秋·湖北黄冈·九年级统考期中) 如图, 点 D, E 是 $\triangle ABC$ 内的两点, 且 $DE \parallel AB$, 连结 AD, BE, CE . 若 $AB=9\sqrt{2}$, $DE=2\sqrt{2}$, $BC=10$, $\angle ABC=75^\circ$, 则 $AD+BE+CE$ 的最小值为_____.



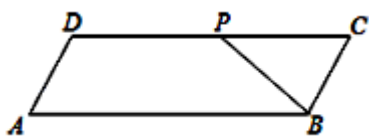
2. (2022 春·上海静安·八年级上海市静安区教育学院附属学校校考期中) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $\angle ABC=45^\circ$, 点 E 为射线 AD 上一动点, 连接 BE , 将 BE 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BF , 连接 AF , 则 AF 的最小值是_____.



3. (2022 春·浙江·八年级期中) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=6$, 点 M 是 AC 边上任意一点, 连接 MB , 以 MB 、 MC 为邻边作平行四边形 $MCNB$, 连接 MN , 则 MN 的最小值_____.

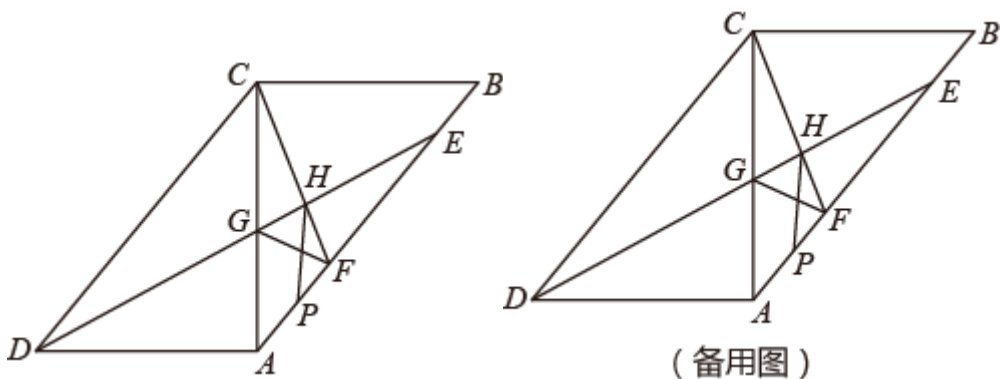


4. (2022 春·江苏南通·八年级校联考期中) 如图, $\square ABCD$ 中, $\angle DAB=30^\circ$, $AB=6$, $BC=2$, P 为边 CD 上的一动点, 则 $2PB+PD$ 的最小值等于_____.



5. (2022 春·重庆·八年级校考期中) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \perp AC$, $AD=AC$, 点 E 为 AB 上一动点, DE 与 AC 相交于点 G , $CH \perp DE$, 垂足为 H , CH 的延长线与 AB 相交于点 F , 点 P 在边 AB 上

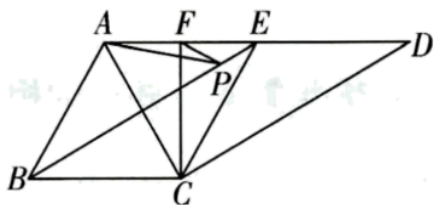
- (1) 若 $DG=\sqrt{10}$, $AG=1$, 求 AB 的长
- (2) 求证 $DG=CF+FG$
- (3) 若 $AP=1$, $AD=4\sqrt{2}$, 请直接写出 PH 的最小值



6. (2022 春·四川遂宁·九年级校考期中) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $BC = \frac{1}{2}AD$, 点 E 为 AD 的中点, 点 F 为 AE 的中点, $AC \perp CD$, 连接 BE 、 CE 、 CF .

(1) 判断四边形 $ABCE$ 的形状, 并说明理由;

(2) 如果 $AB=4$, $\angle D=30^\circ$, 点 P 为 BE 上的动点, 求 $\triangle PAF$ 的周长的最小值.

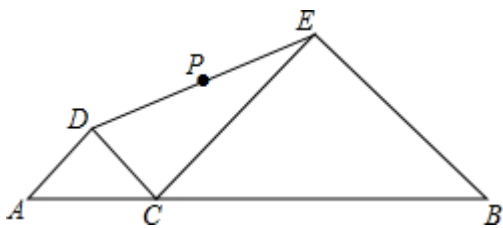


必考点 8

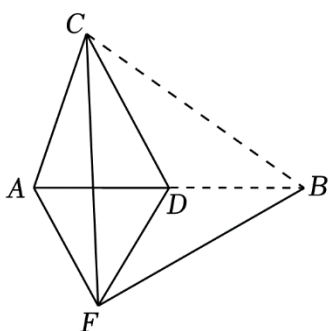
构造平行四边形



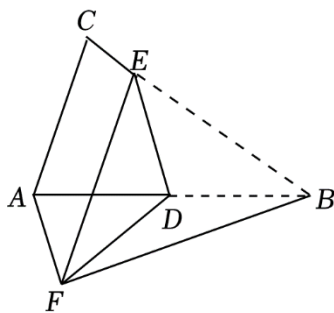
1. (2022 春·湖北武汉·八年级武汉外国语学校(武汉实验外国语学校)校考期中) 如图, 线段 AB 长为 6cm , 点 C 是线段 AB 上一动点 (不与 A , B 重合), 分别以 AC 和 BC 为斜边, 在 AB 的同侧作等腰直角三角形 $\triangle ADC$, $\triangle CEB$, 点 P 是 DE 的中点, 当点 C 从距离 A 点 1cm 处沿 AB 向右运动至距离 B 点 1cm 处时, 点 P 运动的路径长是 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



2. (2022 秋·江苏常州·八年级统考期中) 【模型建立】



(图1)



(图2)

(1)如图 1, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AB 边的中点, 将 $\triangle BDC$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle FDC$, 连接 FA, FB .

①求证: $\triangle AFB$ 是直角三角形;

②延长 FA, BC 交于点 E , 判断 CF 与 BE 的数量关系, 并证明你的结论;

(2)【拓展应用】如图 2, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AB 边的中点, 点 E 是 BC 边上一点, 将 $\triangle BDE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle FDE$, 连接 FA, FB .

①判断 AF 与 DE 的位置关系, 并证明你的结论;

②若 $AC \parallel EF$, 用等式表示线段 BE, CE, AC 之间的数量关系, 并证明你的结论.

3. (2022 秋·广东广州·八年级华南师大附中校考期中) 如图, $\triangle CAB$ 与 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形. $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 连接 AD, BE .

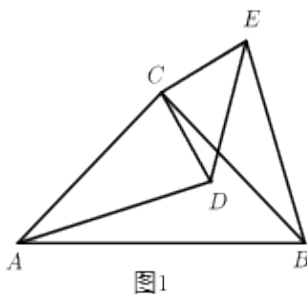


图1

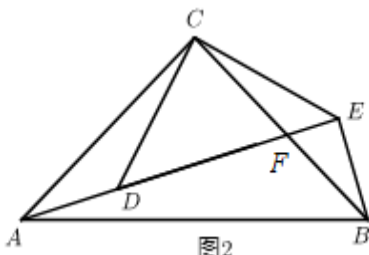


图2

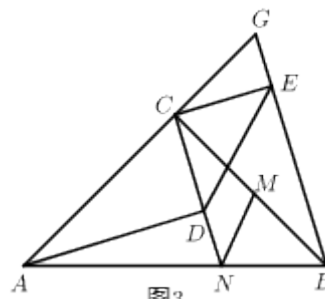


图3

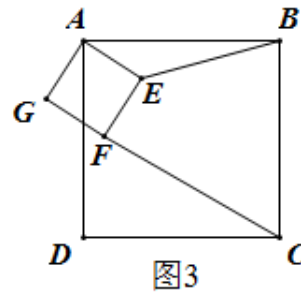
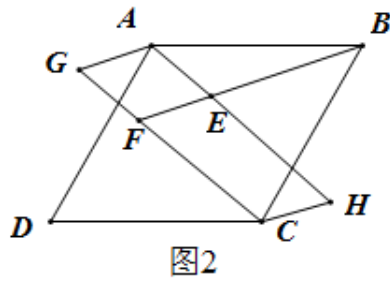
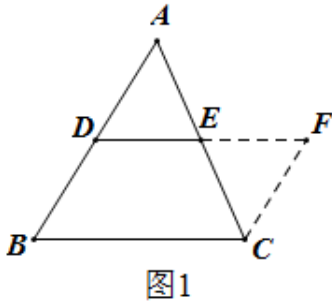
(1)如图 1, 若 $\angle CAD = 30^\circ, \angle DCB = 10^\circ$, 求 $\angle DEB$ 的度数;

(2)如图 2, 若 A, D, E 三点共线, AE 与 BC 交于点 F , 且 $CF = BF, AD = 3$, 求 $\triangle CEF$ 的面积;

(3)如图 3, BE 与 AC 的延长线交于点 G , 若 $CD \perp AD$, 延长 CD 与 AB 交于点 N , 在 BC 上有一点 M 且 $BM = CG$, 连接 NM , 请猜想 CN, NM, BG 之间的数量关系并证明你的猜想.

4. (2022 春·江苏无锡·八年级江苏省锡山高级中学实验学校校考期中) 我们知道, 平行四边形的对边平行且相等, 利用这一性质, 可以为证明线段之间的位置关系和数量关系提供帮助.

重温定理, 识别图形



(1) 如图 1, 我们在探究三角形中位线 DE 和第三边 BC 的关系时, 所作的辅助线为“延长 DE 到点 F , 使 $EF = DE$, 连接 CF ”, 此时 DE 与 DF 在同一直线上且 $DE = \frac{1}{2}DF$, 又可证图中的四边形 _____ 为平行四边形, 可得 BC 与 DF 的关系是 _____, 于是推导出了“ $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$ ”.

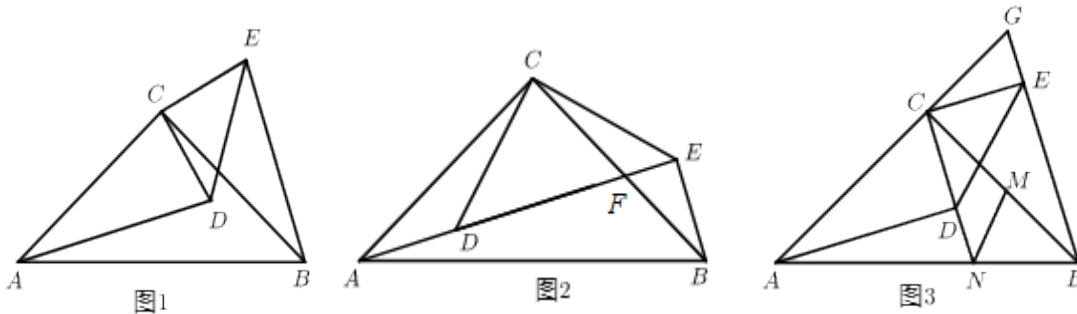
寻找图形, 完成证明

(2) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是菱形, $\triangle BEH$ 是等边三角形, $\angle ABC = \angle AEF = 60^\circ$, 连接 CF, CH . 求证: $CF = BE$.

构造图形, 解决问题.

(3) 如图 3, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形, 连接 BE, CF . 直接写出 CF 与 BE 的数量关系.

5. (2022 秋·重庆渝北·八年级重庆市两江育才中学校校考期中) 如图, $\triangle CAB$ 与 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ, CA = CB, CD = CE, \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ, \angle CDE = \angle CED = 45^\circ$, 连接 AD, BE .



(1) 如图 1, 若 $\angle CAD = 28^\circ, \angle DCB = 10^\circ$, 则 $\angle DEB$ 的度数为 _____ 度;

(2) 如图 2, 若 A, D, E 三点共线, AE 与 BC 交于点 F , 且 $CF = BF, AD = 3$, 求 $\triangle CEF$ 的面积;

(3) 如图 3, BE 与 AC 的延长线交于点 G , 若 $CD \perp AD$, 延长 CD 与 AB 交于点 N , 在 BC 上有一点 M 且 $BM = CG$, 连接 NM , 请猜想 CN, NM, BG 之间的数量关系并证明你的猜想.

6. (2022 秋·重庆沙坪坝·八年级重庆市凤鸣山中学校校考期中) 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 都是等腰直角三角形, C 为它们的公共直角顶点.

(1) 如图 1, 当点 D 在 BC 边上时, 连接 AD, BE , 求证: $AD = BE$;

(2) 如图 2, F 是线段 AD 上的一点, 连接 CF, 若 $AF=CF$, 试判断 BE 与 CF 的数量关系和位置关系, 并说明理由;

(3) 如图 3, 把 $\triangle DEC$ 绕点 C 顺时针旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 将 (2) 问的条件 $AF=CF$ 换成 $AF=FD$, 其他条件不变, (2) 问中的关系是否仍然成立? 若成立, 请说明理由; 若不成立, 请直接写出相应的正确的结论.

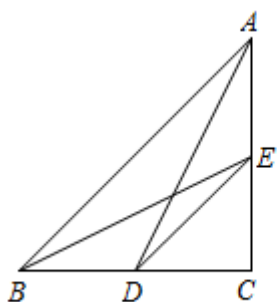


图1

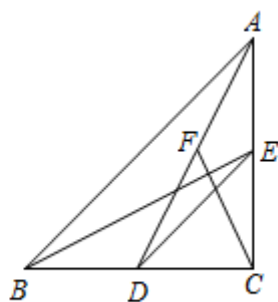


图2

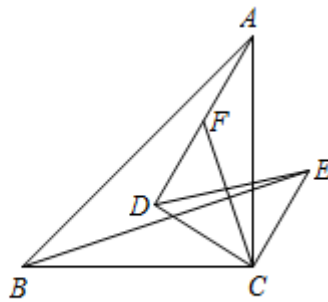


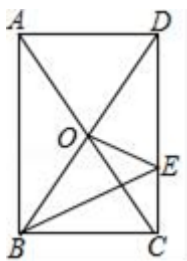
图3

必考点 9

矩形的折叠问题

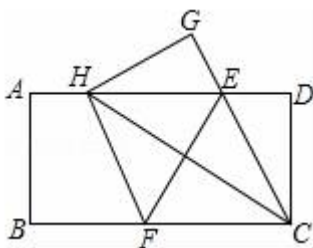


1. (2022 春·福建福州·八年级校考期末) 如图, 在矩形 ABCD 中, 点 O 为对角线的交点, 点 E 为 CD 上一点, 沿 BE 折叠, 点 C 恰好与点 O 重合, 点 G 为 BD 上的一动点, 则 $EG+CG$ 的最小值 m 与 BC 的数量关系是()



- A. $\sqrt{3}m = \sqrt{5}BC$ B. $m = \sqrt{2}BC$ C. $\sqrt{3}m = \sqrt{7}BC$ D. $2m = \sqrt{7}BC$

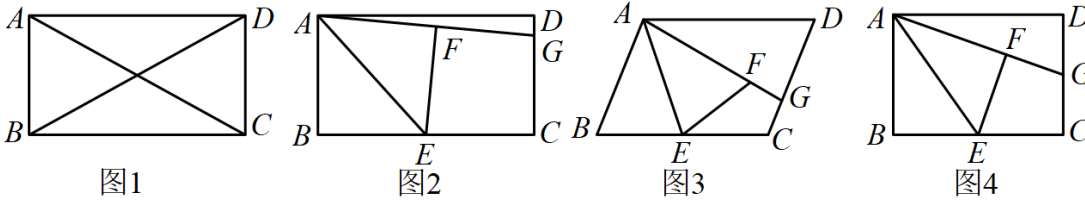
2. (2022 秋·四川达州·九年级统考期末) 如图, 在一张矩形纸片 ABCD 中, $AB=4$, $BC=8$, 点 E, F 分别在 AD, BC 上, 将纸片 ABCD 沿直线 EF 折叠, 点 C 落在 AD 上的一点 H 处, 点 D 落在点 G 处, 有以下四个结论



- ① 四边形 CFHE 是菱形;
 ② EC 平分 $\angle DCH$;
 ③ 线段 BF 的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$;
 ④ 当点 H 与点 A 重合时, $EF = 2\sqrt{5}$.

以上结论中，你认为正确的有_____。（填序号）

3. （2022 秋·山东淄博·八年级统考期末）定义：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形。



(1)根据定义判矩形

已知：如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC, BD 是它的两条对角线， $AC = BD$ 。求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形。

(2)动手操作有发现

如图 2，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 BC 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠后得到 $\triangle AFE$ ，点 F 在矩形 $ABCD$ 内部，延长 AF 交 CD 于点 G 。猜想线段 GF 与 GC 有何数量关系？并证明你的结论。

(3)类比探究到一般

如图 3，将(2)中的矩形 $ABCD$ 改为平行四边形，其它条件不变，(2)中的结论是否仍然成立，请说明理由。

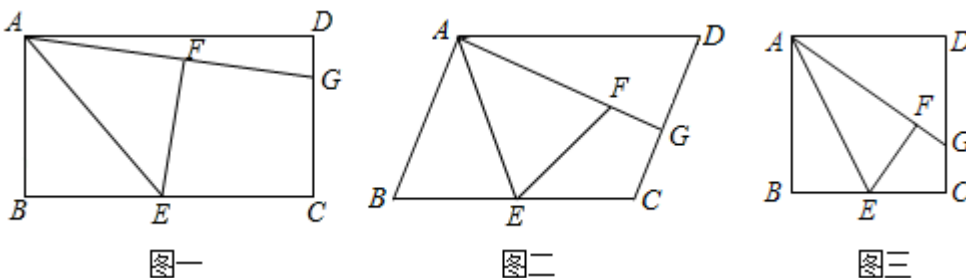
(4)解决问题巧应用

如图 4，保持(2)中的条件不变，若 G 点是 CD 的中点，且 $AB = 2$ ，请直接写出矩形 $ABCD$ 的面积。

4. （2022 春·湖北宜昌·八年级统考期末）(1)【操作发现】：如图一，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 BC 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠后得到 $\triangle AFE$ ，点 F 在矩形 $ABCD$ 内部，延长 AF 交 CD 于点 G 。猜想线段 GF 与 GC 的数量关系是_____。

(2)【类比探究】：如图二，将(1)中的矩形 $ABCD$ 改为平行四边形，其它条件不变，(1)中的结论是否仍然成立？请说明理由。

(3)【应用】：如图三，将(1)中的矩形 $ABCD$ 改为正方形，边长 $AB=4$ ，其它条件不变，求线段 GC 的长。

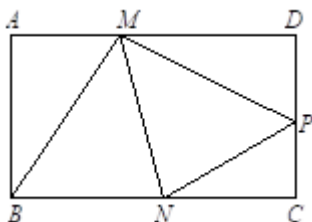


5. （2022 春·全国·八年级统考期末）已知：如图，矩形纸片 $ABCD$ 的边 $AD=3$ ， $CD=2$ ，点 P 是边 CD 上的一

个动点（不与点 C 重合，把这张矩形纸片折叠，使点 B 落在点 P 的位置上，折痕交边 AD 与点 M ，折痕交边 BC 于点 N 。

(1) 写出图中的全等三角形. 设 $CP=x$, $AM=y$, 写出 y 与 x 的函数关系式;

(2) 试判断 $\angle BMP$ 是否可能等于 90° . 如果可能, 请求出此时 CP 的长; 如果不可能, 请说明理由.



必考点 10

矩形与等腰三角形

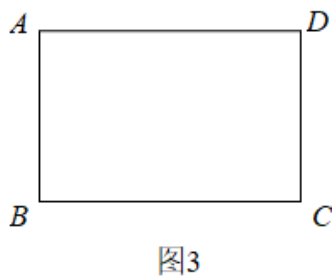
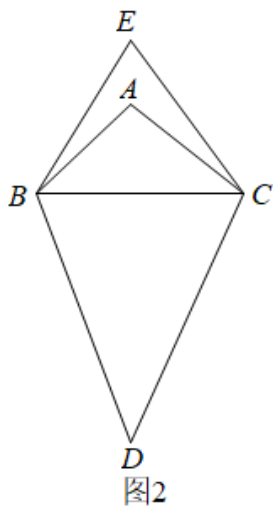
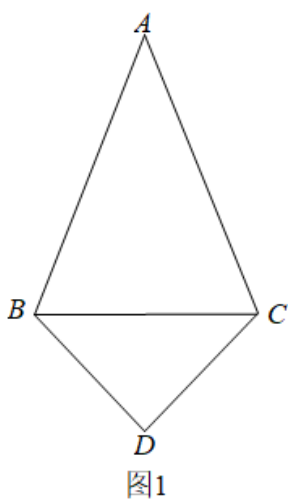


1. (2022 秋·江西吉安·九年级统考期末) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=5$, 点 E 在 AD 边上, 若 $\triangle BCE$ 是等腰三角形, 则线段 DE 的长为_____.

2. (2022 秋·浙江·八年级期末) 在一张长为 6cm , 宽为 5cm 的矩形纸片上, 现要剪下一个腰长为 4cm 的等腰三角形 (要求: 等腰三角形的一个顶点与矩形的一个顶点重合, 其余的两个顶点在矩形的边上) 则剪下的等腰三角形的面积为_____ cm^2 .

3. (2022 秋·福建福州·八年级校考期末) 已知: 若两个等腰三角形有公共底边, 则称这两个等腰三角形的顶角的顶点关于这条底边互为顶针点; 若再满足两个顶角和是 180° , 则称这个两个顶点关于这条底边互为勾股顶针点.

如图 1, 四边形 $ABCD$ 中, BC 是一条对角线, $AB=AC$, $DB=DC$, 则点 A 与点 D 关于 BC 互为顶针点; 若再满足 $\angle A+\angle D=180^\circ$, 则点 A 与点 D 关于 BC 互为勾股顶针点.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/416011150205011010>