

二元一次方程组复习

一、知识要点

1、二元一次方程组的有关概念

I. 二元一次方程

- (1) 概念：含有_____未知数，并且未知数的项的次数都是_____，这样的整式方程叫做二元一次方程。
- (2) 一般形式： $ax+by=c$ ($a \neq 0, b \neq 0$).
- (3) 使二元一次方程两边的值_____的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解。
- (4) 解的特点：一般地，二元一次方程有无数个解。由这些解组成的集合，叫做这个二元一次方程的解集。

II. 二元一次方程组

- (1) 概念：具有相同未知数的_____二元一次方程合在一起，就组成了一个二元一次方程组。

(2) 一般形式：
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \text{ 均不为零}).$$

- (3) 二元一次方程组的解：一般地，二元一次方程组的两个方程的_____，叫做二元一次方程组的解。

2、二元一次方程组的解法

解二元一次方程组的基本思想是_____，即化二元一次方程组为一元一次方程，主要方法有_____消元法和_____消元法。

1. 用代入消元法——不要漏掉括号

- (1) 从方程组中选定一个系数比较简单的方程进行变形，用含有 x (或 y) 的代数式表示出 y (或 x)，即变成 $y=ax+b$ (或 $x=ay+b$) 的形式；
- (2) 将 $y=ax+b$ (或 $x=ay+b$) 代入另一个方程，消去 y (或 x)，得到关于 x (或 y) 的一元一次方程；
- (3) 解这个一元一次方程，求出 x (或 y) 的值；
- (4) 把 x (或 y) 的值代入 $y=ax+b$ (或 $x=ay+b$) 中，求 y (或 x) 的值。

2. 用加减消元法——不要漏乘

- (1) 在二元一次方程组中，若有同一个未知数的系数相同(或互为相反数)，则可以直接相减(或相加)，消去一个未知数；
- (2) 在二元一次方程组中，若不存在(1)中的情况，可选一个适当的数去乘方程的两边，使其中一个未知数的系数相同(或互为相反数)，再把方程两边分别相减(或相加)，消去一个未知数；
- (3) 解这个一元一次方程；
- (4) 将求出的一元一次方程的解代入原方程组中系数比较简单的方程内，求出另一个未知数。

二、典型例题

考点一：二元一次方程概念与解法

例 1. 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} mx+ny=8 \\ nx-my=1 \end{cases}$ 的解，则 $2m-n=$ _____.

例 2. 小明和小佳同时解方程组 $\begin{cases} mx + y = 5 \\ 2x - ny = 13 \end{cases}$, 小明看错了 m , 解得 $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -2 \end{cases}$, 小华看错

了 n , 解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 \end{cases}$, 你能知道原方程组正确的解吗


总结分析: 灵活学会“方程解”概念解题.

【巩固】已知方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ ax - by = -4 \end{cases}$ 和方程组 $\begin{cases} 3x - 5y = 16 \\ bx + ay = -8 \end{cases}$ 的解相同, 求

$(2a + b)^{2017}$ 的值.

【变式】已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax + by = c \\ ex + by = f \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$, 你能求

得关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} a(x - y) + b(x + y) = c \\ e(x - y) + b(x + y) = f \end{cases}$ 的解吗

 ★剖析总结★: 灵活学会“方程解”概念解题, 利用解相同, 可以将方程重新组合, 换位联立; 在解题过程中, 常常运用类比的思想【巩固 2】.

考点二：解决实际问题

列方程(组)解应用题的一般步骤

- 1、**审**：有什么，求什么，干什么；
- 2、**设**：设未知数，并注意单位；
- 3、**找**：等量关系；
- 4、**列**：用数学语言表达出来；
- 5、**解**：解方程(组)；
- 6、**验**：检验方程(组)的解是否符合实际题意。
- 7、**答**：完整写出答案(包括单位)。

列方程组思想：

找出相等关系“未知”转化为“已知”。有几个未知数就列出几个方程，所列方程必须满足：

(1) 方程两边表示的是同类量；(2) 同类量的单位要统一；(3) 方程两边的数值要相等。

列二元一次方程——解决实际问题

类型： (1) 方案问题；(2) 行程问题；(3) 工程问题；(4) 数字问题；(5) 年龄问题；(6) 分配问题；(7) 销售利润问题；(8) 和差倍分问题；(9) 几何问题；(10) 表格或图示问题；(11) 古代问题；(12) 优化方案问题。

题型一 二元一次方程组的应用 - 方案问题

典例 1 (2020·监利县期中) 1400 元奖金要分给 22 名获奖员工，其中一等奖每人 200 元，二等奖每人 50 元。试问经理，该怎样分发这 1400 元奖金？

【答案】 一等奖 2 人，二等奖 20 人

【详解】

解： 设一等奖 x 人，二等奖 y 人，由题意可得：

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 200x + 50y = 1400 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 20 \end{cases}$$

答： 一等奖 2 人，二等奖 20 人即可分发这 1400 元奖金。

变式 1-1 (2018·大石桥市期末) 已知用 2 辆 A 型车和 1 辆 B 型车装满货物一次可运货 10 吨；用 1 辆 A 型车和 2 辆 B 型车装满货物一次可运货 11 吨。某物流公司现有 31 吨货物，计

划同时租用 A 型车 a 辆，B 型车 b 辆，一次运完，且恰好每辆车都装满货物.根据以上信息，解答下列问题：

①1 辆 A 型车和 1 辆 B 型车都装满货物一次可分别运货多少吨？

②请你帮该物流公司设计租车方案.

【答案】 (1) 1 辆 A 型车一次可运货 3 吨，一辆 B 型车一次可运货 4 吨； (2) 三种方案：①A 型车 1 辆；B 型车 7 辆；②A 型车 5 辆；B 型车 4 辆；③A 型车 9 辆；B 型车 1 辆.

【详解】

(1) 设 1 辆 A 型车和 1 辆 B 型车都装满货物一次可分别运货 x 吨，y 吨，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 2y = 11 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

答：1 辆 A 型车和 1 辆 B 型车都装满货物一次可分别运货 3 吨，4 吨.

(2) 由题意可得： $3a+4b=31$,

$$\therefore b = \frac{31-3a}{4}.$$

$\therefore a, b$ 均为整数，

$$\therefore \text{有} \begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}, \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases} \text{和} \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \text{三种情况.}$$

故共有三种租车方案，分别为：①A 型车 1 辆，B 型车 7 辆；

②A 型车 5 辆，B 型车 4 辆；③A 型车 9 辆，B 型车 1 辆.

变式 1-2 (2019·贵港市期末) 某中学组织学生春游，原计划租用 45 座客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满，已知 45 座客车每日每辆租金为 220 元，60 座客车每日每辆租金为 300 元. 试问：

(1) 春游学生共多少人，原计划租 45 座客车多少辆？

(2) 若租用同一种车，要使每位同学都有座位，怎样租车更合算.

【答案】 (1) 春游学生共 240 人，原计划租 45 座客车 5 辆； (2) 租用 4 辆 60 座客车更合算.

【详解】

解：(1) 设参加春游的学生共 x 人，原计划租用 45 座客车 y 辆.

根据题意，得

$$\begin{cases} 45y + 15 = x \\ 60(y - 1) = x \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 240 \\ y = 5 \end{cases}$$

答：春游学生共 240 人，原计划租 45 座客车 5 辆；

(2) 租 45 座客车： $240 \div 45 \approx 5.3$ (辆)，所以需租 6 辆，租金为 $220 \times 6 = 1320$ (元)，

租 60 座客车： $240 \div 60 = 4$ (辆)，所以需租 4 辆，租金为 $300 \times 4 = 1200$ (元)。

答：租用 4 辆 60 座客车更合算。

题型二 二元一次方程组的应用 – 行程问题

典例 2 (2018·广州市期末) 从甲地到乙地的路有一段上坡与一段平路，如果保持上坡每小时走 3km，平路每小时走 4km，下坡每小时走 5km，那么从甲地到乙地用 54 分钟，从乙地到甲地用 42 分钟，甲地到乙地的全程是多少。

【答案】 3.1

【详解】

解：设从甲地到乙地的上坡路为 x km，平路为 y km，

$$\text{依题意得} \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{54}{60} \\ \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = \frac{42}{60} \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} x = 1.5 \\ y = 1.6 \end{cases}$$

$\therefore x + y = 3.1$ km，

答：甲地到乙地的全程是 3.1 km。

变式 2-1 (2020·辉县市期中) 一列快车长 230 米，一列慢车长 220 米，若两车同向而行，快车从追上慢车时开始到离开慢车，需 90 秒钟；若两车相向而行，快车从与慢车相遇时到离开慢车，只需 18 秒钟，问快车和慢车的速度各是多少？

【答案】 快车的速度是 15 米/秒，慢车的速度是 10 米/秒。

【详解】

设快车的速度是 x 米/秒，慢车的速度是 y 米/秒，

$$\begin{cases} 90x - 90y = 220 + 230 \\ 18x + 18y = 220 + 230 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases}$,

答：快车的速度是 15 米/秒，慢车的速度是 10 米/秒.

变式 2-2 (2019·许昌市期末) 为提高学生综合素质，亲近自然，励志青春，某学校组织学生举行“远足研学”活动，先以每小时 6 千米的速度走平路，后又以每小时 3 千米的速度上坡，共用了 3 小时；原路返回时，以每小时 5 千米的速度下坡，又以每小时 4 千米的速度走平路，共用了 4 小时，问平路和坡路各有多远.

【答案】平路有 $\frac{44}{3}$ 千米，坡路有 $\frac{5}{3}$ 千米

【详解】

解：设平路有 x 千米，坡路有 y 千米.

由题意可知 $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 4 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{44}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

答：平路有 $\frac{44}{3}$ 千米，坡路有 $\frac{5}{3}$ 千米

题型三 二元一次方程组的应用 - 工程问题

典例 3 (2020·甘南县期中) 一家商店进行装修，若请甲、乙两个装修组同时施工，8 天可以完成，需付两组费用共 3520 元，若先请甲组单独做 6 天，再请乙组单独做 12 天可以完成，需付费用 3480 元，问：

- (1) 甲、乙两组工作一天，商店各应付多少钱？
- (2) 已知甲单独完成需 12 天，乙单独完成需 24 天，单独请哪个组，商店所需费用最少？
- (3) 若装修完后，商店每天可赢利 200 元，你认为如何安排施工更有利于商店？请你帮助商店决策.(可用(1)(2)问的条件及结论)

【答案】(1) 甲、乙两组工作一天，商店各应付 300 元和 140 元；(2) 单独请乙组需要的费用少；(3) 甲乙合作施工更有利于商店.

【详解】

解：(1) 设：甲组工作一天商店应付 x 元，乙组工作一天商店付 y 元.

由题意得：
$$\begin{cases} 8x+8y=3520 \\ 6x+12y=3480 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=300 \\ y=140 \end{cases}$$

答：甲、乙两组工作一天，商店各应付 300 元和 140 元

(2)单独请甲组需要的费用： $300 \times 12 = 3600$ 元.

单独请乙组需要的费用： $24 \times 140 = 3360$ 元.

答：单独请乙组需要的费用少.

(3)请两组同时装修，理由：

甲单独做，需费用 3600 元，少赢利 $200 \times 12 = 2400$ 元，相当于损失 6000 元；

乙单独做，需费用 3360 元，少赢利 $200 \times 24 = 4800$ 元，相当于损失 8160 元；

甲乙合作，需费用 3520 元，少赢利 $200 \times 8 = 1600$ 元，相当于损失 5120 元；

因为 $5120 < 6000 < 8160$ ，所以甲乙合作损失费用最少，

答：甲乙合作施工更有利于商店.

变式 3-1 (2020·成都市期末) 某汽车制造厂生产一款电动汽车，计划一个月生产 200 辆. 由于抽调不出足够的熟练工来完成电动汽车的安装，工厂决定招聘一些新工人，他们经过培训后上岗，也能独立进行电动汽车的安装. 生产开始后，调研部门发现：1 名熟练工和 2 名新工人每月可安装 8 辆电动汽车；2 名熟练工和 3 名新工人每月可安装 14 辆电动汽车.

(1) 每名熟练工和新工人每月分别可以安装多少辆电动汽车？

(2) 若工厂现在有熟练工人 30 人，求还需要招聘多少新工人才能完成一个月的生产计划？

【答案】 (1) 每名熟练工每月可以按装 4 辆电动汽车，每名新工人每月可以按装 2 辆电动汽车； (2) 40 名

【详解】

解：(1) 设每名熟练工每月可以按装 x 辆电动汽车，每名新工人每月可以按装 y 辆电动汽车，

依题意，得：
$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

答：每名熟练工每月可以按装 4 辆电动汽车，每名新工人每月可以按装 2 辆电动汽车.

(2) 设还需要招聘 m 名新工人才能完成一个月的生产计划，

依题意，得： $4 \times 30 + 2m = 200$,

解得： $m = 40$.

答：还需要招聘 40 名新工人才能完成一个月的生产计划.

变式 3-2 (2019·成都市期末) 某工程队承包了某标段全长 1755 米的过江隧道施工任务，

甲、乙两个班组分别从东、西两端同时掘进. 已知甲组比乙组平均每天多掘进 0.6 米，经过 5 天施工，两组共掘进了 45 米.

(1) 求甲、乙两个班组平均每天各掘进多少米？

(2) 为加快工程进度，通过改进施工技术，在剩余的工程中，甲组平均每天能比原来多掘进 0.2 米，乙组平均每天能比原来多掘进 0.3 米. 按此施工进度，能够比原来少用多少天完成任务？

【答案】 (1) 甲班组平均每天掘进 4.8 米，乙班组平均每天掘进 4.2 米；

(2) 少用 10 天完成任务.

【详解】

(1) 设甲、乙班组平均每天掘进 x 米， y 米，

$$\text{得} \begin{cases} x-y=0.6 \\ 5(x+y)=45 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=4.8 \\ y=4.2 \end{cases}.$$

\therefore 甲班组平均每天掘进 4.8 米，乙班组平均每天掘进 4.2 米.

(2) 设按原来的施工进度和改进施工技术后的进度分别还需 a 天， b 天完成任务，则

$$a = (1755 - 45) \div (4.8 + 4.2) = 190 \text{ (天)}$$

$$b = (1755 - 45) \div (4.8 + 0.2 + 4.2 + 0.3) = 180 \text{ (天)}$$

$$\therefore a - b = 10 \text{ (天)}$$

\therefore 少用 10 天完成任务.

题型四 二元一次方程组的应用 - 数字问题

典例 4 (2019·靖远县期末) 一个两位数，个位数字与十位数字的和为 8，个位数字与十位数字互换位置后，所得的两位数比原两位数小 18，则原两位数是多少？

【答案】 原两位数是 53.

【详解】

解：设原两位数的个位数字为 x ，十位数字为 y ，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} x + y = 8 \\ 10y + x - (10x + y) = 18 \end{cases} \text{解得：} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\therefore 10y + x = 53.$$

答：原两位数是 53.

变式 4-1 (2020·海淀区期末) 小明和小亮做加减法游戏，小明在一个加数后面多写了一个 0，得到的和为 242，而小亮在另一个加数后面多写了一个 0，得到的和为 341。原来两个加数是多少？

【答案】 21,32;

【解析】

设一个加数为 x ，另一个加数为 y 。

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 10x + y = 242 \\ x + 10y = 341 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 21 \\ y = 32 \end{cases}.$$

答：原来两个加数分别是 21，32.

变式 4-2 (2020·阳谷县期中) 列二元一次方程组解应用题.

已知一个两位数，它的十位上的数字与个位上的数字的和为 12，若对调个位与十位上的数字，得到的新数比原数小 18，求原来的两位数.

【答案】 原来的两位数为 75.

【解析】

设个位数字为 x ，十位数字为 y 。

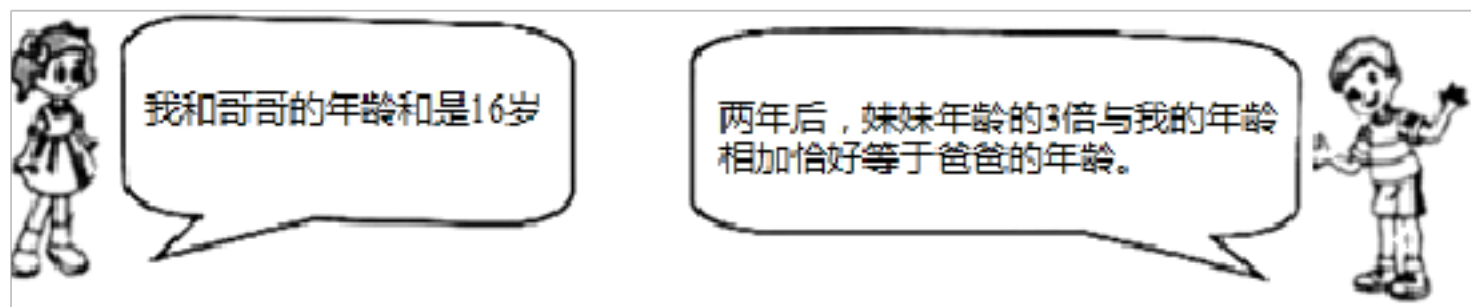
$$\text{根据题意得：} \begin{cases} x + y = 12 \\ (10y + x) - (10x + y) = 18 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

答：原来的两位数为 75.

题型五 二元一次方程组的应用 - 年龄问题

典例 5 (2019·南阳市期中) 一名 34 岁的男子带着他的两个孩子一同进行晨跑，下面是两个孩子与记者的对话：



根据对话内容, 请你用方程的知识帮记者求出哥哥和妹妹的年龄.

【答案】 妹妹的年龄是 6 岁, 哥哥的年龄是 10 岁.

【详解】

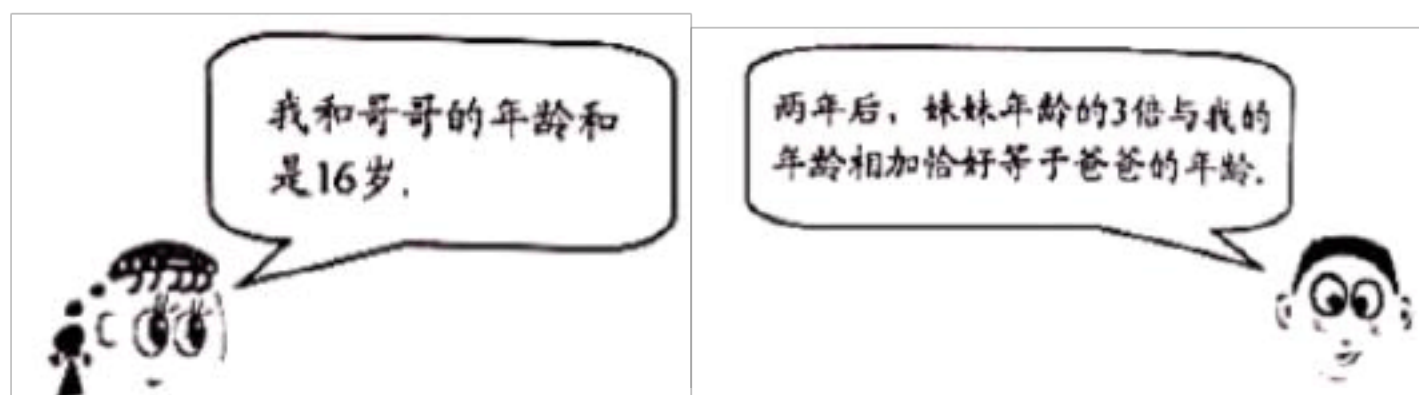
解: 设妹妹的年龄是 x 岁, 哥哥的年龄是 y 岁,

$$\text{依题意, 得: } \begin{cases} x + y = 16 \\ 3(x + 2) + (y + 2) = 34 + 2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases}$$

答: 妹妹的年龄是 6 岁, 哥哥的年龄是 10 岁.

变式 5-1 (2020·江北市期末) 4月9日上午8时, 2017 徐州国际马拉松赛鸣枪开跑, 一名 34 岁的男子带着他的两个孩子一同参加了比赛, 下面是两个孩子与记者的对话:



根据对话内容, 请你用方程的知识帮记者求出哥哥和妹妹的年龄.

【答案】 今年妹妹 6 岁, 哥哥 10 岁.

【详解】

试题分析: 设今年妹妹的年龄为 x 岁, 哥哥的年龄为 y 岁, 根据两个孩子的对话, 即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组, 解之即可得出结论.

试题解析: 设今年妹妹的年龄为 x 岁, 哥哥的年龄为 y 岁,

根据题意得:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 3(x + 2) + (y + 2) = 34 + 2 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases}$$

答: 今年妹妹 6 岁, 哥哥 10 岁.

变式 5-2 (2019·绍兴市期末) 师生对话, 师: 我像你这么大的时候, 你才 1 岁, 你到我这么大的时候, 我已经 40 岁了, 问老师和学生现在各几岁?

【答案】 老师和学生现在的年龄分别为 27 岁和 14 岁

【详解】

设老师的年龄是 x 岁, 学生的年龄是 y 岁, 由题意得: 根据题意列方程组得:

$$\begin{cases} x - y = y - 1 \\ x + x - y = 40 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 27 \\ y = 14 \end{cases}.$$

答: 老师和学生现在的年龄分别为 27 岁和 14 岁.

题型六 二元一次方程组的应用 - 分配问题

典例 6 (2020·许昌市期末) 某校的大学生自愿者参与服务工作, 计划组织全校自愿者统一乘车去某地. 若单独调配 36 座客车若干辆, 则空出 6 个座位, 若只调配 22 座客车若干辆, 则用车数量将增加 3 辆, 并有 12 人没有座位.

(1) 计划调配 36 座客车多少辆? 该大学共有多少名自愿者? (列方程组解答)

(2) 若同时调配 36 座和 22 座两种车型, 既保证每人有座, 又保证每车不空座, 则两种车型各需多少辆?

【答案】 (1) 计划调配 36 座客车 6 辆, 该大学共有 210 名自愿者; (2) 需调配 36 座新能源客车 4 辆, 22 座新能源客车 3 辆

【详解】

解: (1) 设计划调配 36 座新能源客车 x 辆, 该大学共有 y 名自愿者, 则根据题意得

$$\begin{cases} 36x - 6 = y \\ 22(x + 3) + 12 = y \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} x = 6 \\ y = 210 \end{cases}.$$

答: 计划调配 36 座新能源客车 6 辆, 该大学共有 210 名自愿者.

(2) 设需调配 36 座新能源客车 m 辆, 22 座新能源客车 n 辆, 根据题意得

$$36m + 22n = 210, \therefore n = \frac{105 - 18m}{11}.$$

$$\text{又} \because m, n \text{ 为正整数, } \therefore \begin{cases} m = 4 \\ n = 3 \end{cases}.$$

答: 需调配 36 座新能源客车 4 辆, 22 座新能源客车 3 辆.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/41611102022010053>