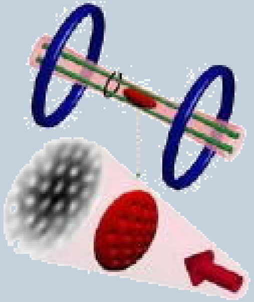
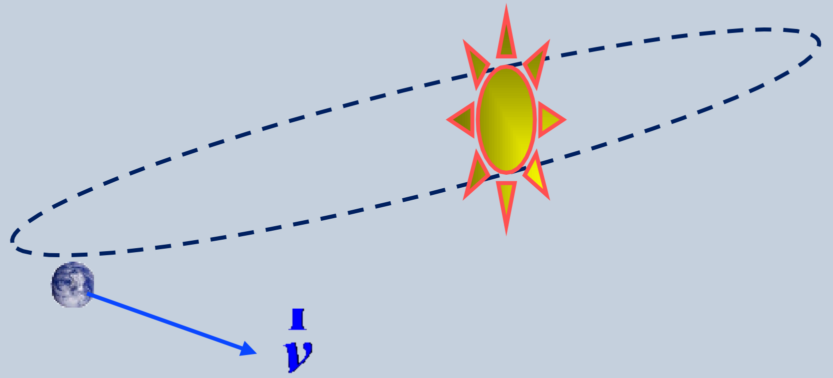
第四章 角动量及其守恒定律

（2课时）



课前讨论

- 设地球绕地轴做匀角速转动，地球表面的物体相对地面都静止不动，则：
  - 对于地球表面的物体 (视为质点)，有哪些物理量是守恒的？
  - 将地球与地球表面的物体视为质点系，哪些物理量是守恒的？
- 地球沿椭圆轨道绕太阳做周期性转动，在这个过程中有哪些物理量是守恒的？



- 角动量是描述转动问题的最重要的物理量之一，是解决天体问题的最重要的物理规律。

  - 角动量的概念在物理学的发展中经历了有趣的演变过程。18 世纪在力学中才定义和开始利用它，直到 19 世纪人们才把它看成力学中的最基本的概念之一，到 20 世纪它加入了动量和能量的行列，成为力学中最重要的概念之一。
  - 角动量之所以能有这样的地位，是由于它也服从守恒定律，在近代物理学中应用极为广泛。

本课教学基本要求

- 掌握力矩的基本概念，能够熟练计算力矩及力矩的功。
- 掌握角动量的基本概念及计算方法。
- 掌握角动量定理及其守恒定律，能够应用它们解决典型的相关物理问题。
- 了解有心力场的基本特征。

一、力矩（moment of force）

- 力对参考点的力矩
  - 定义：作用于质点 P 的力 $\vec{F}$ 对参考点 O 的力矩等于力的作用点位矢与力的叉积，即：

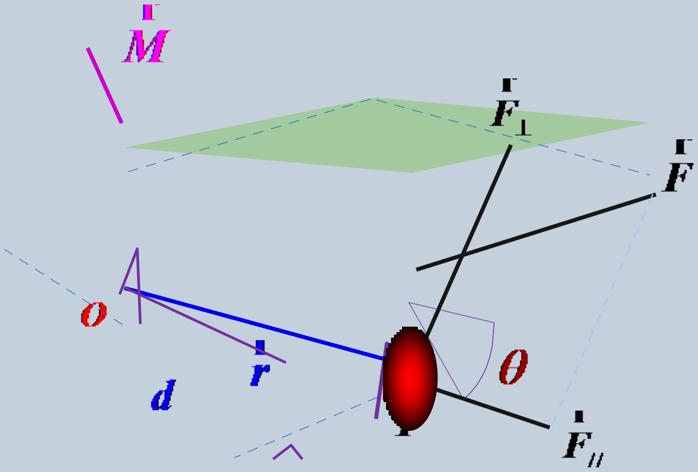
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

  - 大小

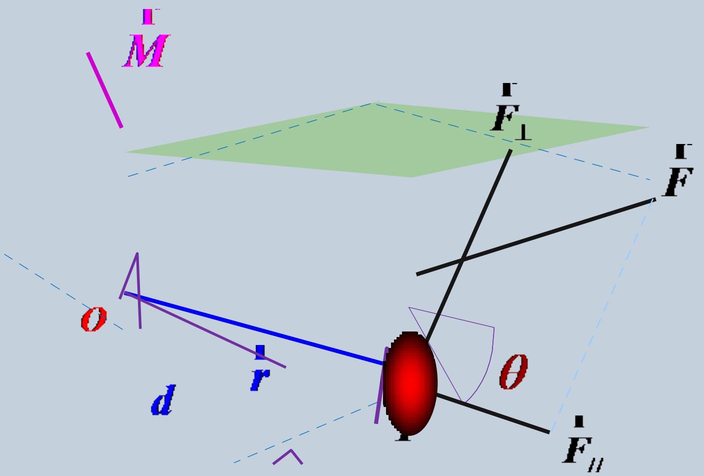
$$M = |\vec{M}| = rF\sin\theta = Fd = F_{\perp} \cdot r$$

  - 方向

$\vec{r}$、$\vec{F}$、$\vec{M}$ 成右手螺旋关系。

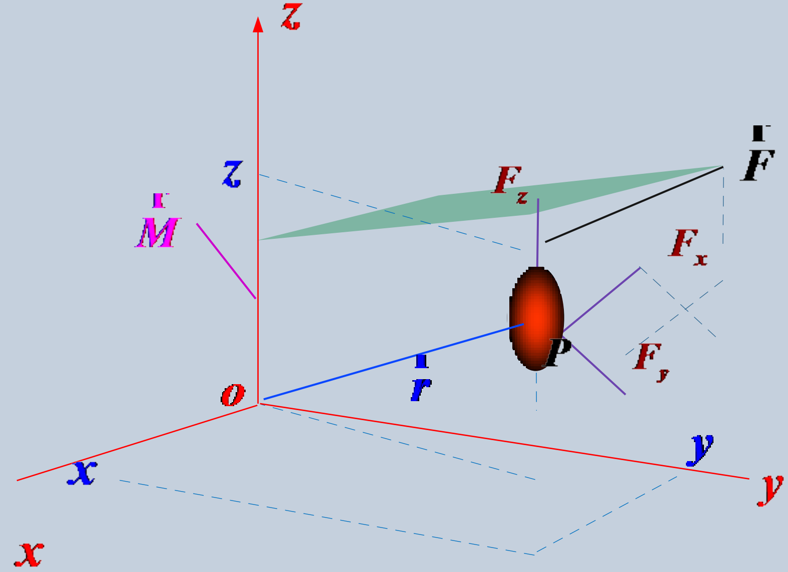


- 注意：
  - 力矩是对参考点而言的，讨论力矩问题必须指明参考点的位置。
  - 力矩使物体绕参考点的转动状态发生变化，即力矩是物体转动状态发生变化的原因。
  - 若力的作用线通过参考点，则其对参考点的力矩为零。



- 在直角坐标系中投影

  x, y, z 满足右手螺旋关系



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$

$$= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})$$

$$= xF_y\hat{k} - xF_z\hat{j} - yF_x\hat{k} + yF_z\hat{i} + zF_x\hat{j} - zF_y\hat{i}$$

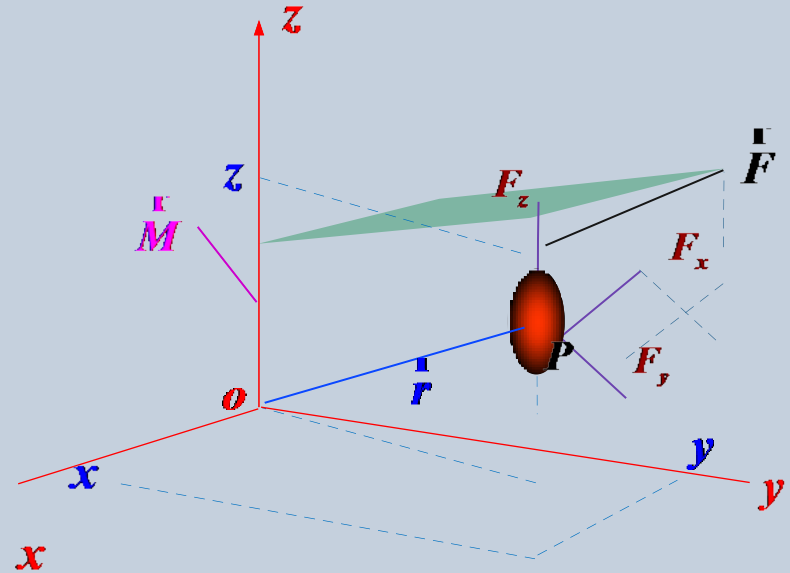
$$= (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

- 力矩在直角坐标系中的投影可以表示为

$$\vec{M} = (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$



理解等号右侧每一项的含义！

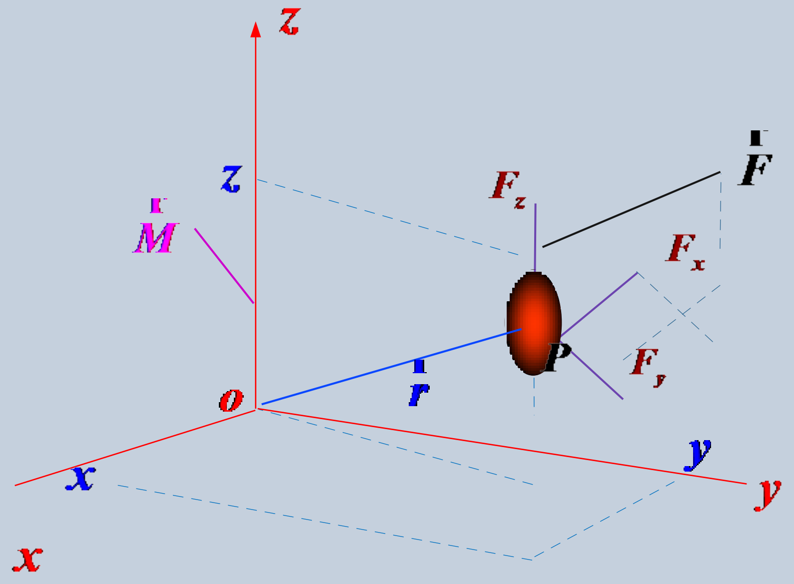
力对轴的力矩

$$\vec{M} = (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

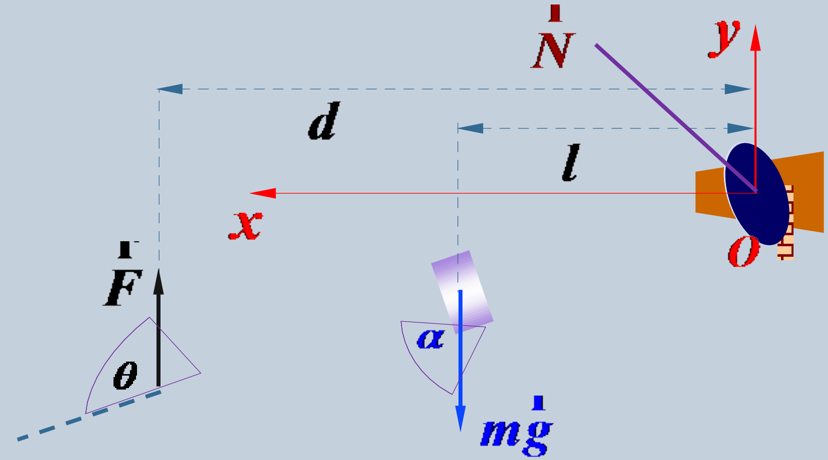
力对轴的力矩等于力对轴上一点的力矩在该轴上的投影：

$$M_Z = \vec{M} \cdot \hat{k}$$



实际生活中，有很多器具都应用到杠杆原理，例如杆秤、天平、辘辘、螺丝刀、扳手……

右图中，z 轴向里：



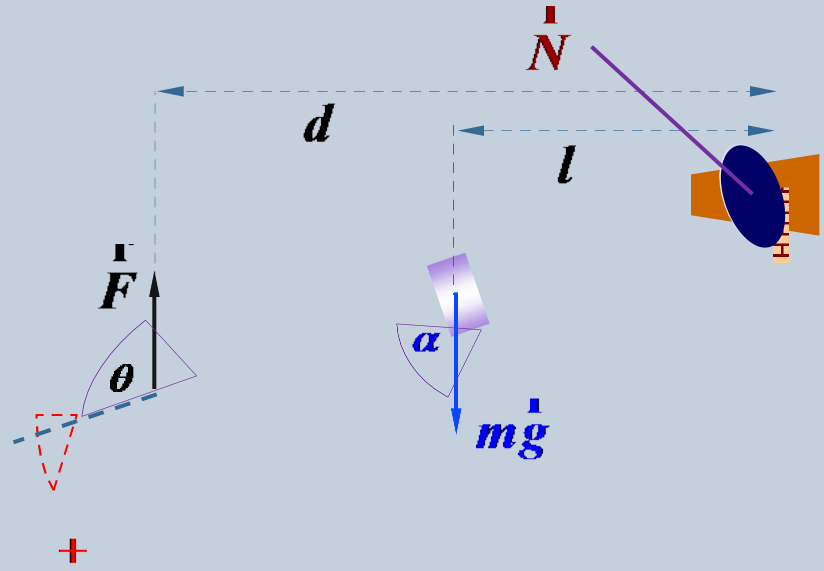
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

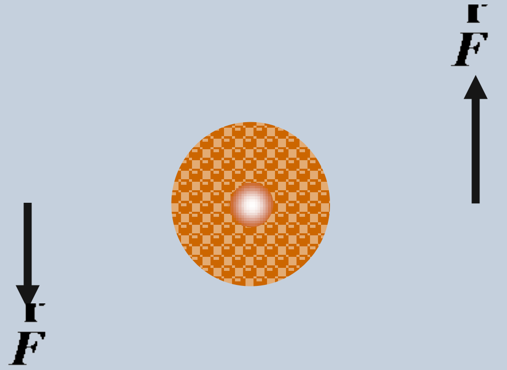
$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_{OF} &= Fd\hat{k} \\ M_{ZF} &= Fd \\ \vec{M}_{OG} &= -mgl\hat{k} \\ M_{ZG} &= -mgl \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_Z = Fd - mgl$$

说明：

- 力对轴的力矩同样是矢量，可以根据力矩的定义进行计算，但使用标量形式更简洁。
- 投影时，注意每个分量的方向，以坐标轴方向为参照，对于未知方向的量，一律设为正。
- 如未建立坐标系，依据力矩使质点转动的方向确定正负，通常取逆时针为正，反之为负。



- 合力矩的计算
  - 质元受多个力时，下面的方法相同吗？
    - 先求合力，再求合力的力矩；
    - 计算各力的力矩，再求这些力矩的和；



  - 合力矩：多个外力同时作用在物体上，若作用效果与某个力矩相当，这个力矩叫做这多个力的合力矩。合力矩与合力的力矩不同，不要混淆。

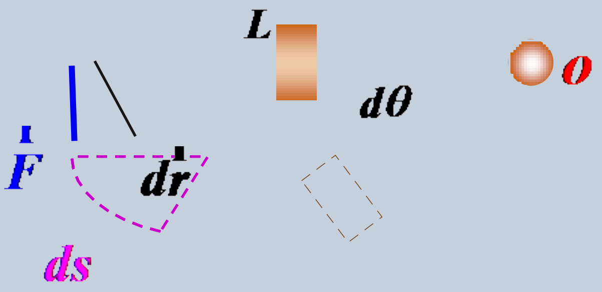
- 力矩的功

用力 F 使杆绕中心轴转动，则其所做的功为：

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fds = FLd\theta = Md\theta$$

对于任一宏观过程，所做的总

功可表示为：

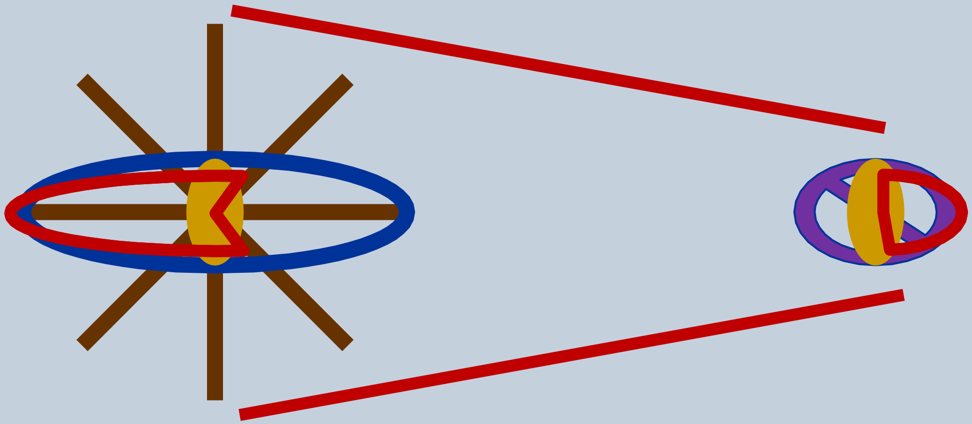


$$A = \int_{\Delta\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Delta s} Fds = \int_{\Delta\theta} Md\theta$$

特别地，如果杆在恒定力矩作用下转动，则：

$$A = \int_{\Delta\theta} Md\theta = M\Delta\theta$$

- 讨论：如图，电动机（右侧）通过皮带带动左侧的轮子，传送带的摩擦力是静摩擦还是动摩擦？对轮子做功吗？



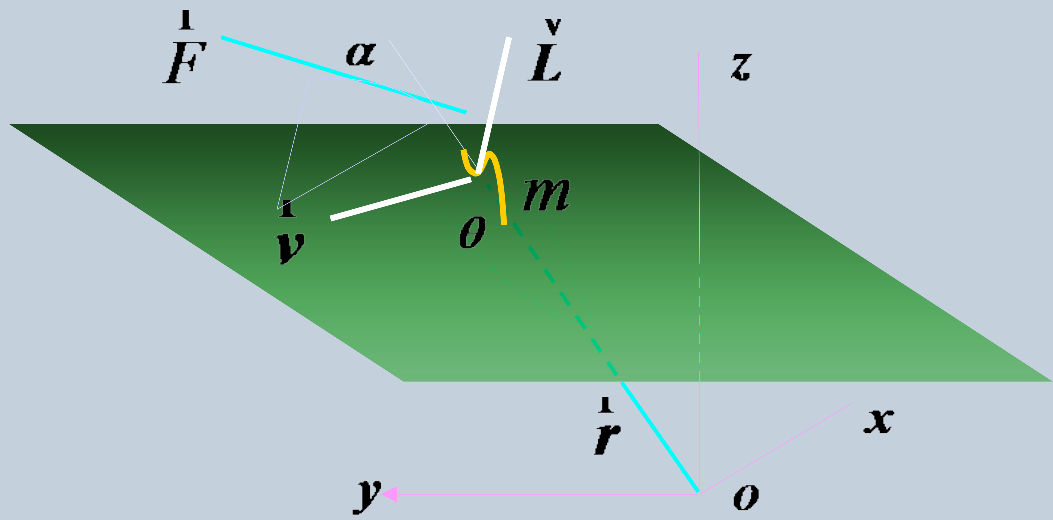
二、质点的角动量定理和守恒律

- 质点对参考点的角动量定理

质点 P 质量为 m，受力为 F

根据动量定理有：

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\vec{P}=\frac{d}{dt}m\vec{v}$$



两侧以位矢叉乘得：

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{P}=\vec{r}\times\frac{d}{dt}m\vec{v}$$

$$\because \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}m\vec{v}=\vec{r}\times\frac{d}{dt}m\vec{v}$$

$$\therefore \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})\equiv\frac{d\vec{L}}{dt}$$

- 定义质点对参考点的角动量（动量矩）：

$$\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

描述物体转动状态的物理量（转动的量的量度）

- 质点对参考点的角动量定理：

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}}$$

物理意义：作用于质点的所有力对参考点的合力矩等于该质点对同一参考点的角动量对时间的变化率。

积分形式：

$$\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt}$$

质点对参考点的角动量的增量等于作用于质点的力对同一参考点的角冲量(angular impulse)。

- 质点对参考点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

若 $\vec{M} \equiv 0$ 则 $\vec{L} =$ 恒矢量

物理意义：在某过程中，若质点所受的对某一固定参考点的合力矩恒为零，则质点对该参考点的角动量守恒。

- 在中心力场中（如太阳系），质点所受到的力与其位置矢量共线，这时，力对力心的力矩总为零。因此，质点在此力场中运动时，它对力心的角动量守恒。这也是为什么行星受到太阳的吸引，但行星不会落到太阳中去的原因。

- 例：证明开普勒第二定律，即行星与太阳的连线在相同时间内扫过相等的面积（掠面速度或面积速度相等）。

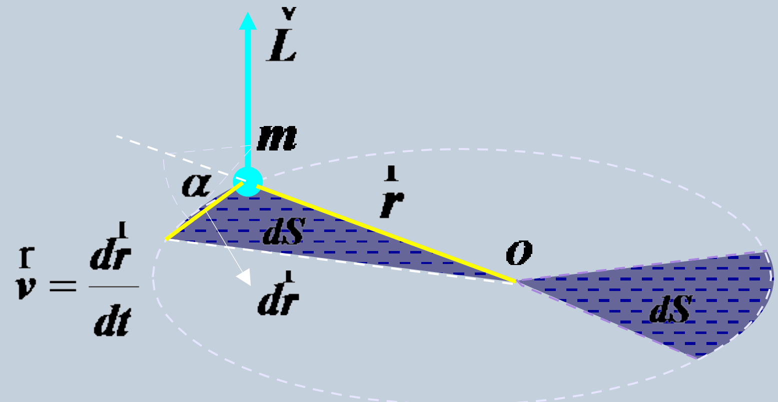
证：行星受有心力作用绕太阳转动，对力心角动量守恒

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L = rmv\sin\alpha = m\frac{r\left|d\vec{r}\right|\sin\alpha}{dt}$$

$$= 2m\frac{dS}{dt} = 常量$$

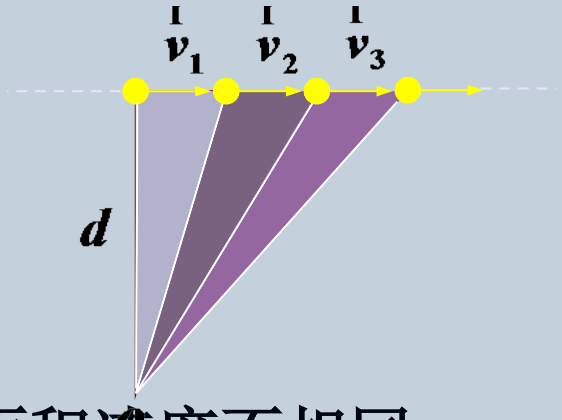
$$\therefore V_{面} = \frac{dS}{dt} = 常量$$



即位矢 $\vec{r}$ 在相等的时间内扫过相等的面积。

- 讨论：一质点沿直线运动，在直线外任取一点 *O* 做参考点，对该参考点而言：
  - 若质点做变速运动，其位矢的掠面速度是否相同？
  - 若质点做匀速运动，其位矢的掠面速度是否相同？

质点运动过程中的角动量为：



$$L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv\sin\alpha = mvd$$

$$v_{面} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}vd$$

对于变速直线运动：角动量不守恒，面积速度不相同。

对于匀速直线运动，角动量守恒，面积速度相同。

质点的运动

平动：动量 $\vec{P} = m\vec{v}$

转动：角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$\vec{F}$

$\vec{M}$

动量定理

微分形式：$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

积分形式：$\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{P} - \vec{P}_0$

角动量定理

微分形式：$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

积分形式：$\int_{t_0}^{t} \vec{M}dt = \vec{L} - \vec{L}_0$

$\vec{F} \equiv 0$

$\vec{M} \equiv 0$

动量守恒定律

$\vec{P}$ = 恒矢量

外部作用

角动量守恒定律

$\vec{L}$ = 恒矢量