5.2 函数的表示方法

【学习目标】

1.能够在实际情境中，根据不同的需要，选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数.

2.能够根据给出的实际问题，写出分段函数的表达式，并能简单应用.

返回目录

知识点一 函数的三种表示方法

1.函数的三种表示方法

表示法	定 义
解析法	用__等式__来表示两个变量之间函数关系的方法
列表法	用__列表__来表示两个变量之间函数关系的方法
图象法	用__图象__表示两个变量之间函数关系的方法

2.三种表示方法的优缺点比较

	优 点	缺 点
解析法	一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过用解析式求出任意一个自变量所对应的函数值	不够形象、直观，而且并不是所有的函数都可以用解析法表示
列表法	不通过计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值	它只能表示自变量取较少的有限值的对应关系
图象法	直观形象地表示出函数的变化情况，有利于通过图形研究函数的某些性质	只能近似地求出自变量所对应的函数值，有时误差较大

返回目录

【诊断分析】

任何一个函数都可以用解析法、列表法、图象法三种形式表示吗?

解: 不一定.例如,函数的对应关系是:当x为有理数时,函数值等于1,当x为无理数时,函数值等于0.此函数就无法用图象法表示.

返回目录

知识点二 分段函数

在定义域内不同部分上，有不同的<u>解析表达式</u>，像这样的函数，通常叫作分段函数.

返回目录

【诊断分析】

分段函数的对应关系不同,那么分段函数是由几个不同的函数构成的吗?

解：不是.分段函数的定义域只有一个,只不过在定义域的不同区间上对应关系不同,所以分段函数是一个函数.

返回目录

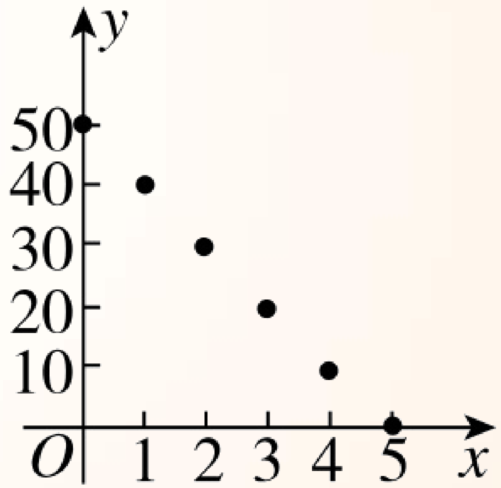
探究点一　函数的表示方法

例1　某问答游戏的规则是：共答5道选择题，基础分为50分，每答错一道题扣10分，答对不扣分．试分别用列表法、图象法、解析法表示一个参与者的得分y与答错题目道数$x(x \in \{0,1,2,3,4,5\})$之间的函数关系$y = f(x)$．

解：（1）用列表法可将函数$y = f(x)$表示为：

	0	1	2	3 x	4	5
	50	40	30	20 y	10	0

（2）用图象法可将函数$y=f(x)$表示为



（3）用解析法可将函数$y=f(x)$表示为$y=50-10x$，$x\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

变式 已知函数$f(x)$由下表给出，则$f[f(2)]=$__1__，满足$f[f(x)]>1$的x的值是__1或3__.

	1	2 x	3
	2	3 f(x)	1

[解析] 由题中的表格可知，当$x=1$时，$f(1)=2$，则$f[f(1)]=f(2)=3>1$；

当$x=2$时，$f(2)=3$，则$f[f(2)]=f(3)=1$；

当$x=3$时，$f(3)=1$，则$f[f(3)]=f(1)=2>1$.

返回目录

探究点二 函数解析式的求法

例2（1） 已知$f(x)$是二次函数，且$f(0)=2$，$f(x+1)-f(x)=x-1$，求$f(x)$；

解：设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由$f(0)=2$，得$c=2$.

由$f(x+1)-f(x)=x-1$得$2ax+a+b=x-1$，

则$\begin{cases}2a=1,\\ a+b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$故$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

（2）已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求$f(x)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解：$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1-1=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

$\because \sqrt{x}\geq 0$，$\therefore \sqrt{x}+1\geq 1$，$\therefore f(x)=x^2-1(x\geq 1)$，

则$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geq 0)$，

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1(x\leq -1$或$x\geq 1)$.

返回目录

变式（1） 已知$f(x)$是一次函数，且满足$3f(x+1)=2x+17$，求$f(x)$的解析式

解：设$f(x)=ax+b(a\neq 0)$，由$3f(x+1)=2x+17$，得

$3[a(x+1)+b]=2x+17$，整理得$3ax+3(a+b)=2x+17$，

则$\begin{cases} 3a=2, \\ 3(a+b)=17, \end{cases}$解得$\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=5, \end{cases}$故$f(x)=\frac{2}{3}x+5.$

（2）已知$f(\sqrt{x}-1)=x+2\sqrt{x}$,求$f(x)$的解析式.

解：令$t=\sqrt{x}-1, t\geq -1$,则$\sqrt{x}=t+1$,

$\therefore f(t)=(t+1)^2+2(t+1)=t^2+4t+3$,故$f(x)=x^2+4x+3(x\geq -1)$.

[素养小结]

求函数解析式的几种常用方法:

(1)待定系数法:当已知函数类型时,常用待定系数法.

(2)代入法:已知$y=f(x)$的解析式,求函数$y=f[g(x)]$的解析式时,可直接用$g(x)$替换$y=f(x)$中的x.

(3)换元法:已知$y=f[g(x)]$的解析式,求$y=f(x)$的解析式,可用换元法,即令$g(x)=t$,反解出x,然后代入$y=f[g(x)]$中,求出$f(t)$,即得$f(x)$.

(4)构造方程组法:当同一个对应关系中的两个自变量之间有互为相反数或者互为倒数关系时,通常构造方程组求解.

返回目录

拓展（1） 已知$af(x)+f(-x)=bx$，其中$a\neq\pm 1$，求$f(x)$；

解：在原式中，以$-x$替换x，得$af(-x)+f(x)=-bx$，于是得

$\begin{cases} af(x)+f(-x)=bx, \\ af(-x)+f(x)=-bx, \end{cases}$消去$f(-x)$，得$f(x)=\frac{bx}{a-1}$，

故$f(x)$的解析式为$f(x)=\frac{b}{a-1}x$.

（2）已知$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+2$，求$f(x)$.

解：在原式中，用$\frac{1}{x}$替换x，得$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{3}{x}+2$，于是有

$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{3}{x}+2, \\ f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+2, \end{cases}$消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，得$f(x)=-x-\frac{2}{x}-2$，

故$f(x)$的解析式为$f(x)=-x-\frac{2}{x}-2(x\neq 0)$.

返回目录

探究点三 分段函数

角度一 分段函数求值

例3 已知函数$f(x)=\begin{cases} x+1, x\leq -2, \\ x^2+2x, -2<x<2, \\ 2x-1, x\geq 2. \end{cases}$

（1）求$f(-5)$，$f(-\sqrt{3})$，$f\left[f\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$的值；

解：由$-5\in(-\infty,-2]$，$-\sqrt{3}\in(-2,2)$，$-\frac{5}{2}\in(-\infty,-2]$，知

$f(-5)=-5+1=-4$，

$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^2+2\times(-\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$，

$f\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{2}+1=-\frac{3}{2}$，又$-2<-\frac{3}{2}<2$，

$\therefore f\left[f\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$.

返回目录

(2) 若$f(a)=3$，求实数a的值.

解： 当$a\le -2$时，$a+1=3$，即$a=2>-2$，不合题意，舍去.

当$-2<a<2$时，$a^2+2a=3$，即$a^2+2a-3=0$，$\therefore (a-1)(a+3)=0$，

得$a=1$或$a=-3$. $\because 1\in(-2,2)$，$-3\notin(-2,2)$，$\therefore a=1$符合题意.

当$a\ge 2$时，$2a-1=3$，即$a=2$，符合题意.