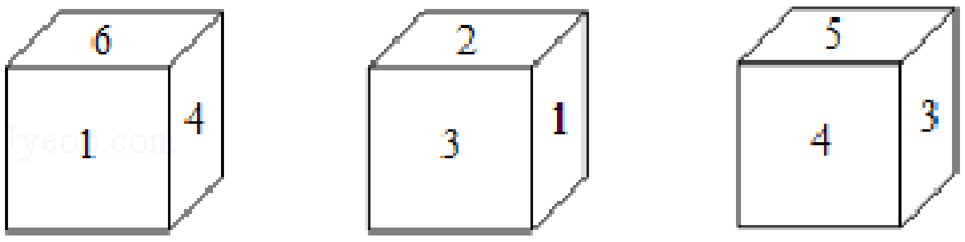
2018年浙江省温州市苍南中学自主招生数学试卷

一、选择题（本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．（5 分）有一正方体，六个面上分别写有数字 1，2，3，4，5，6，有三个人从不同的角度观察的结果如图．如果记 6 的对面的数字为 a，2 的对面的数字为 b，那么 $a+b$ 的值为（　　）

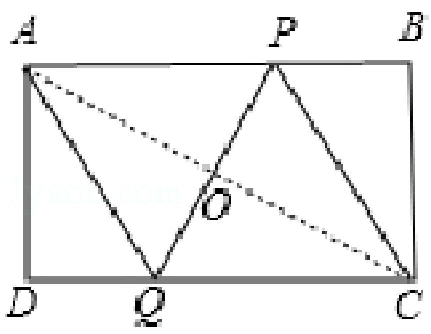


A．3　　B．7　　C．8　　D．11

2．（5 分）已知函数 $y=2018-(x-m)(x-n)$，并且 a，b 是方程 $2018-(x-m)(x-n)=0$ 的两个根，则实数 m，n，a，b 的大小关系可能是（　　）

A．$m<a<b<n$　　B．$m<a<n<b$　　C．$a<m<b<n$　　D．$a<m<n<b$

3．（5 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=CD=x$，$AD=BC=y$，把它折叠起来，使顶点 A 与 C 重合，则折痕 PQ 的长度为（　　）



A．$\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$　　B．$\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$　　C．$\frac{y}{x}\sqrt{2x^2+y^2}$　　D．$\frac{x}{y}\sqrt{x^2+2y^2}$

4．（5 分）已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-a\geqslant 1 \\ \frac{2x+1}{5}+1>x \end{cases}$ 恰有三个整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$-3<a<-2$　　B．$-3\leqslant a<-2$　　C．$-3<a\leqslant -2$　　D．$-3\leqslant a\leqslant -2$

5．（5 分）设 x、y、z 是两两不等的实数，且满足下列等式：$\sqrt{x^3(y-x)^3}+\sqrt{x^3(z-x)^3}=\sqrt{y-x}-\sqrt{x-z}$，则 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的值是（　　）

A．0　　B．1

C．3　　D．条件不足，无法计算

6．（5 分）某粮店用一架不准确的天平（两臂长不相等）称大米．某顾客要购买 10kg 大米，售货员先将 5kg 砝码放入天平左盘，置大米于右盘，平衡后将大米给顾客；然后又将 5kg

砝码放入天平右盘，置大米于左盘，平衡后再将大米给顾客．售货员的这种操作方式结果使（　　）

A．粮店吃亏　　　　B．顾客吃亏

C．粮店和顾客都不吃亏　　　　D．不能确定

7．（5 分）设 P 是高为 h 的正三角形内的一点，P 到三边的距离分别为 x，y，z（$x\leqslant y\leqslant z$）．若以 x，y，z 为边可以组成三角形，则 z 应满足的条件为（　　）

A．$\frac{1}{4}h\leqslant z<\frac{1}{3}h$　　B．$\frac{1}{3}h\leqslant z<\frac{1}{2}h$　　C．$\frac{1}{2}h\leqslant z<\frac{3}{4}h$　　D．$\frac{3}{4}h\leqslant z<h$

8．（5 分）已知 $y=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x=5$ 时，$y=50$；$x=6$ 时，$y=60$；$x=7$ 时，$y=70$．则当 $x=4$ 时，y 的值为（　　）

A．30　　B．34　　C．40　　D．44

二、填空题（本题有 **10** 个小题，每小题 **6** 分，共 **60** 分）

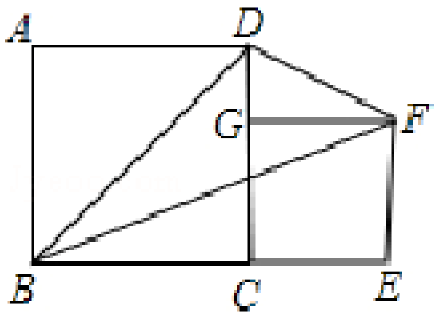
9．（6 分）方程 $x^2-3|x-1|-1=0$ 所有解的和为_______．

10．（6 分）设 a、b、c、d、e 的值均为 0、1、2 中之一，且 $a+b+c+d+e=6$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10$，则 $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$ 的值为_______．

11．（6 分）设 a，b 为两个不相等的实数，且满足 $2a^2-5a=2b^2-5b=1$，则 ab^3+a^3b 的值是

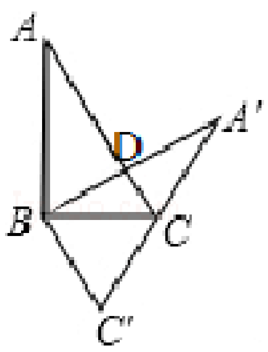
12．（6 分）已知 $(2x-1)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_9x_9$，则 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_8+a_9$ 的值为_______．

13．（6 分）已知四边形 $ABCD$ 是正方形，且边长为 2，延长 BC 到 E，使 $CE=\sqrt{5}-\sqrt{2}$，并作正方形 $CEFG$，（如图），则△BDF 的面积等于_______．



14．（6 分）向一个三角形内加入 2015 个点，加上原三角形的三个点共计 2018 个点．用剪刀最多可以剪出_______个以这 2018 个点为顶点的三角形．

15．（6 分）如图，直角△ABC 中，∠$ABC=90°$，∠$A=20°$，△ABC 绕点 B 旋转至△$A'BC'$ 的位置，此时 C 点恰落在 $A'C'$ 上，且 $A'B$ 与 AC 交于 D 点，那么∠BDC=_______度．



16.（6 分）已知：对于正整数 n，有$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，若某个正整数 k 满足

$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，则 $k=$_______.

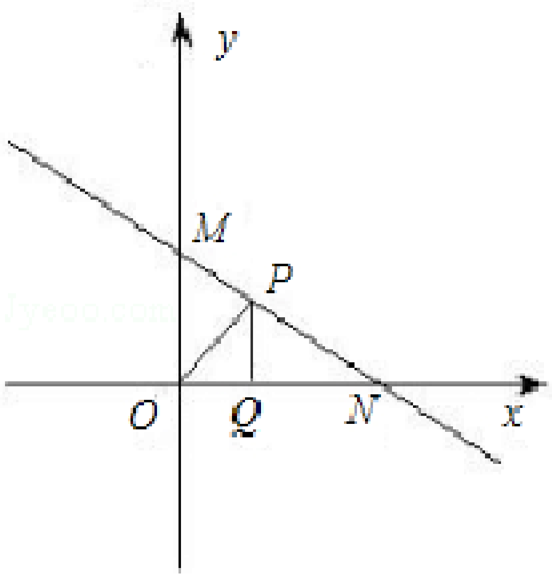
17.（6 分）用 $f(n)$ 表示组成 n 的数字中不是零的所有数字乘积，例如：$f(5)=5$，$f(29)=18$，$f(207)=14$．则 $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(200)=$_______.

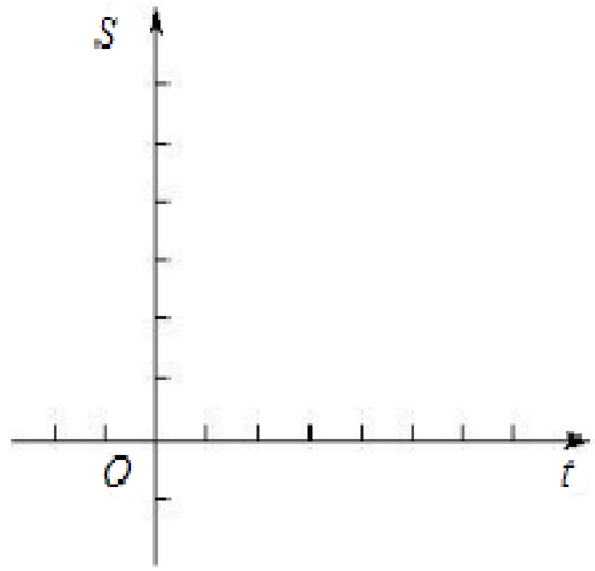
18.（6 分）设 x_1、x_2 是方程 $x^2-6x+a=0$ 的两个根，以 x_1、x_2 为两边长的等腰三角形只可以画出一个，则实数 a 的取值范围是_______.

三、解答题（本大题共 **3** 题，共 **50** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19.（16 分）甲、乙两个粮库原来各存有整袋的粮食，如果从甲库调 90 袋到乙库，则乙库存粮是甲库的 2 倍；如果从乙库调若干袋到甲库，则甲库存粮是乙库的 6 倍．问甲库原来最少存粮多少袋？

20.（16 分）如图，函数 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图象交 y 轴于 M，交 x 轴于 N，点 P 是直线 MN 上任意一点，$PQ\perp x$ 轴，Q 是垂足，设点 Q 的坐标为（t，0），△POQ 的面积为 S（当点 P 与 M、N 重合时，其面积记为 0）．





（1）试求 S 与 t 之间的函数关系式；

（2）在如图所示的直角坐标系内画出这个函数的图象，并利用图象求使得 $S=a$（$a>0$）的点 P 的个数．

21.（18 分）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点（－2，0），且对一切实数 x，都有 $2x\leqslant ax^2+bx+c\leqslant\frac{1}{2}x^2+2$ 成立．

（1）当 $x=2$ 时，求 y 的值；

（2）求此二次函数的表达式；

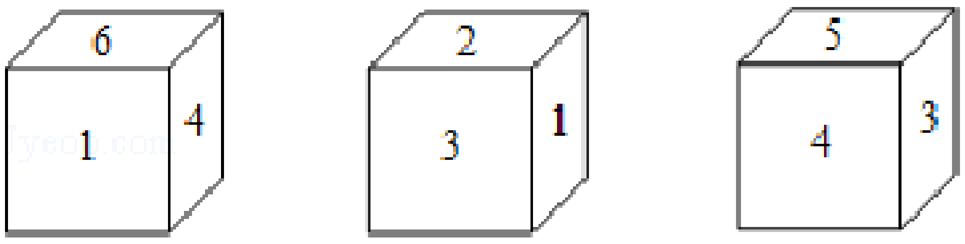
（3）当 $x=t+m$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值为 y_1，当 $x=\frac{t}{2}$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值为 y_2，若对一切 $-1\leqslant t\leqslant 1$，都有 $y_1<y_2$，求实数 m 的取值范围.

2018 年浙江省温州市苍南中学自主招生数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．（5 分）有一正方体，六个面上分别写有数字 1，2，3，4，5，6，有三个人从不同的角度观察的结果如图．如果记 6 的对面的数字为 a，2 的对面的数字为 b，那么 $a+b$ 的值为（　　）



A．3　　B．7　　C．8　　D．11

【分析】由图一和图二可看出 1 的对面的数字是 5；再由图二和图三可看出 3 的对面的数字是 6，从而 2 的对面的数字是 4．

【解答】解：从 3 个小立方体上的数可知，

与写有数字 1 的面相邻的面上数字是 2，3，4，6，

所以数字 1 面对数字 5，

同理，立方体面上数字 3 对 6．

故立方体面上数字 2 对 4．

则 $a=3$，$b=4$，

那么 $a+b=3+4=7$．

故选：B．

【点评】本题考查灵活运用正方体的相对面解答问题，立意新颖，是一道不错的题．解题的关键是按照相邻和所给图形得到相对面的数字．

2．（5 分）已知函数 $y=2018-(x-m)(x-n)$，并且 a，b 是方程 $2018-(x-m)(x-n)=0$ 的两个根，则实数 m，n，a，b 的大小关系可能是（　　）

A．$m<a<b<n$　　B．$m<a<n<b$　　C．$a<m<b<n$　　D．$a<m<n<b$

【分析】首先把方程化为一般形式，由于 a，b 是方程的解，根据根与系数的关系即可得到 m，n，a，b 之间的关系，然后对四者之间的大小关系进行讨论即可判断．

【解答】解：由 $2018-(x-m)(x-n)=0$ 变形得 $(x-m)(x-n)=2018$，

$\therefore x-m>0$，$x-n>0$ 或 $x-m<0$，$x-n<0$，

∴$x>m$，$x>n$ 或 $x<m$，$x<n$，

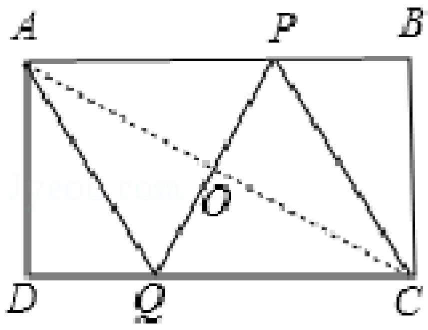
∵a，b 是方程的两个根，将 a，b 代入，得：$a>m$，$a>n$，$b<m$，$b<n$ 或 $a<m$，$a<n$，$b>m$，$b>n$，

观察选项可知：$a<b$，$m<n$，只有 D 可能成立．

故选：D．

【点评】本题考查了抛物线与 x 轴的交点，根与系数的关系，难度较大，关键是对 m，n，a，b 大小关系的讨论是此题的难点．

3．（5 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=CD=x$，$AD=BC=y$，把它折叠起来，使顶点 A 与 C 重合，则折痕 PQ 的长度为（　　）



A．$\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$　　B．$\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$　　C．$\frac{y}{x}\sqrt{2x^2+y^2}$　　D．$\frac{x}{y}\sqrt{x^2+2y^2}$

【分析】由翻折可得到 QP 垂直平分 AC，那么 $AQ=QC$，易证△APO≌△CQO，再利用勾股定理求出 AP 的长，进而利用菱形的面积等于对角线乘积的一半，求出 PQ 的长即可．

【解答】解：∵A，C 两点关于 PQ 对称，所以 $AO=CO$，

∵$AC\perp QP$，从而∠AOP=∠QOC=90°，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB\parallel DC$，

∴∠APQ=∠PQC．

∴△APO≌△CQO，

∴$CQ=AP$，

由 $PQ\perp AC$ 且平分 AC，可知 $AQ=CQ$．

∴四边形 $AQCP$ 是菱形，

设 $AP=a$，则 $AQ=a$，$DQ=x-a$，

在 Rt△ADQ 中，利用勾股定理可知：$a^2=y^2+(x-a)^2$，

∴整理得：$2ax=x^2+y^2$，

解得 $a=\frac{x^2+y^2}{2x}$，

菱形 $AQCP$ 的面积为：$\frac{1}{2}PQ\bullet AC=CQ\bullet AD$，

$\therefore \frac{1}{2}PQ\times\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{2x}\times y$，

整理得：$PQ\times\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x}\times y$，

解得：$PQ=\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$.

故选：A.

【点评】此题主要考查了翻折变换的性质和矩形的性质以及菱形的判定与性质等知识，遇到折叠变换问题注意找出翻折的边得出对应相等，再利用勾股定理求出，这是此类问题常用解题思路.

4.（5 分）已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x-a\geqslant 1\\ \frac{2x+1}{5}+1>x\end{cases}$ 恰有三个整数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$-3<a<-2$　　B．$-3\leqslant a<-2$　　C．$-3<a\leqslant-2$　　D．$-3\leqslant a\leqslant-2$

【分析】首先熟练解得每个不等式，再根据它恰有三个整数解，分析出它的整数解，进而求得实数 a 的取值范围.

【解答】解：$\begin{cases}x-a\geqslant 1①\\ \frac{2x+1}{5}+1>x②\end{cases}$

由①，得 $x\geqslant a+1$；

由②，得 $x<2$.

根据题意，得它的三个整数解只能是 -1，0，1，所以 $-2<a+1\leqslant-1$，

解得 $-3<a\leqslant-2$.

故选：C.

【点评】此题考查了不等式组的解法，同时能够根据它的整数解正确分析其字母的取值范围.

5．（5 分）设 x、y、z 是两两不等的实数，且满足下列等式：$\sqrt{x^3(y-x)^3}+\sqrt{x^3(z-x)^3}=\sqrt{y-x}-\sqrt{x-z}$，则 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的值是（　　）

A．0　　B．1

C．3　　D．条件不足，无法计算

【分析】由二次根式有意义可知 $x-z\geqslant 0$，$x^3(y-x)^3\geqslant 0$，$x^3(z-x)^3\geqslant 0$，可得 $x=0$，$y=-z$．代入代数式即可求解．

【解答】解：依题意得：

$$\begin{cases} y-x\geqslant 0 \\ x-z\geqslant 0 \\ x^3(y-x)^3\geqslant 0 \\ x^3(z-x)^3\geqslant 0 \end{cases},$$

解得 $x=0$，

$\because \sqrt{x^3(y-x)^3}+\sqrt{x^3(z-x)^3}=\sqrt{y-x}-\sqrt{x-z}$，

$\therefore \sqrt{y}-\sqrt{-z}=0$，

$\therefore y=-z$

$\therefore$把 $x=0$，$y=-z$ 代入 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 得：原式$=(-z)^3+z^3=0$

故选：A．

【点评】此题考查了二次根式的有意义时被开方数是非负数的性质与不等式组解集的求解方法．此题比较难，注意仔细分析．

6．（5 分）某粮店用一架不准确的天平（两臂长不相等）称大米．某顾客要购买 10kg 大米，售货员先将 5kg 砝码放入天平左盘，置大米于右盘，平衡后将大米给顾客；然后又将 5kg 砝码放入天平右盘，置大米于左盘，平衡后再将大米给顾客．售货员的这种操作方式结果使（　　）

A．粮店吃亏　　B．顾客吃亏

C．粮店和顾客都不吃亏　　D．不能确定

【分析】此题要根据天平的有关知识来解答，即在此题中天平的臂长不等，这是此题的关键．

【解答】解：由于天平的两臂不相等，故可设天平左臂长为 a，右臂长为 b（不妨设 $a>b$），先称得的大米的实际质量为 m_1，后称得的大米的实际质量为 m_2

由杠杆的平衡原理：$bm_1=a\times 5$，$am_2=b\times 5$，

解得 $m_1=\frac{5b}{a}$，$m_2=\frac{5a}{b}$

则 $m_1+m_2=\frac{5b}{a}+\frac{5a}{b}$

下面比较 m_1+m_2 与 10 的大小：（求差比较法）

因为（m_1+m_2）$-10=\frac{5b}{a}+\frac{5a}{b}-10=\frac{5(b-a)^2}{ab}>0$

又因为 $a\neq b$，所以（m_1+m_2）$-10>0$，即 $m_1+m_2>10$

这样可知称出的大米质量大于 10*kg*，商店吃亏．

故选：*A*．

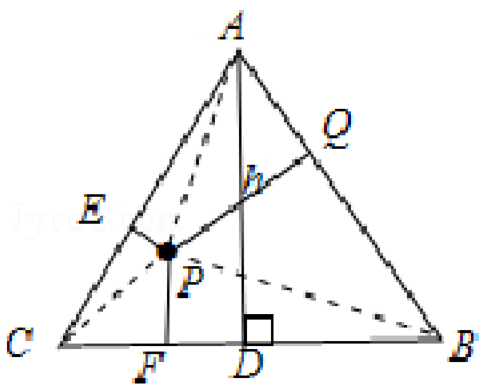
【点评】此题学生要利用物理知识来求解，所以学生平时在学习时要各科融汇贯通．

7.（5 分）设 *P* 是高为 *h* 的正三角形内的一点，*P* 到三边的距离分别为 *x*，*y*，*z*（$x\leqslant y\leqslant z$）．若以 *x*，*y*，*z* 为边可以组成三角形，则 *z* 应满足的条件为（　　）

A．$\frac{1}{4}h\leqslant z<\frac{1}{3}h$　　B．$\frac{1}{3}h\leqslant z<\frac{1}{2}h$　　C．$\frac{1}{2}h\leqslant z<\frac{3}{4}h$　　D．$\frac{3}{4}h\leqslant z<h$

【分析】如图，连接 *AP*，*BP*，*CP*，先利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}$，找出 *x*，*y*，*z* 与 *h* 的关系，再运用三角形三边关系可得 $z<\frac{1}{2}h$，由 $x\leqslant y\leqslant z$ 可得 $z\geqslant\frac{1}{3}h$，即可求出 *z* 应满足的条件．

【解答】解：如图，*PE*＝*x*，*PF*＝*y*，*Pq*＝*Q*＝*z*，连接 *AP*，*BP*，*CP*，



$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}$，

$\therefore \frac{1}{2}BC\bullet h=\frac{1}{2}AC\bullet x+\frac{1}{2}BC\bullet y+\frac{1}{2}AB\bullet z$，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB=BC=AC$，

$\therefore \frac{1}{2}BC\bullet h=\frac{1}{2}BC$（$x+y+z$），即 $x+y+z=h$，

$\because$ 以 *x*，*y*，*z* 为边可以组成三角形，

$\therefore x+y>z$，

$\therefore 2z<h$，即 $z<\frac{1}{2}h$，

又$\because x\leqslant y\leqslant z$，

$\therefore z \geqslant \frac{1}{3}$（$x+y+z$），即 $z \geqslant \frac{1}{3}h$，

$\therefore \frac{1}{3}h \leqslant z < \frac{1}{2}h$.

故选：B.

【点评】本题主要考查了三角形边角关系，解题的关键是利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}$，找出 x，y，z 与 h 的关系.

8.（5 分）已知 $y=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x=5$ 时，$y=50$；$x=6$ 时，$y=60$；$x=7$ 时，$y=70$．则当 $x=4$ 时，y 的值为（　　）

A．30　　B．34　　C．40　　D．44

【分析】将 x、y 的值分别代入 $y=x^3+ax^2+bx+c$，转化为关于 a、b、c 的方程，求出 a、b、c 的值，再把 $x=4$ 代入，求出 y 的值.

【解答】解：把 $x=5$，$y=50$；$x=6$，$y=60$；$x=7$，$y=70$ 代入 $y=x^3+ax^2+bx+c$，

得 $\begin{cases} 5^3+5^2a+5b+c=50 \\ 6^3+6^2a+6b+c=60 \\ 7^3+7^2a+7b+c=70 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a=-18 \\ b=117 \\ c=-210 \end{cases}$；

代入 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 得：

$y=x^3-18x^2+117x-210$，

把 $x=4$ 代入 $y=x^3-18x^2+117x-210$ 得：

$y=4^3-18\times4^2+117\times4-210=64-288+468-210=34$，

故选：B.

【点评】本题通过建立关于 a，b，c 的三元一次方程组，求得 a、b、c 的值后而求解.

二、填空题（本题有 **10** 个小题，每小题 **6** 分，共 **60** 分）

9.（6 分）方程 $x^2-3|x-1|-1=0$ 所有解的和为__-1__.

【分析】含有绝对值的方程，一般要分两种情况进行解答，即当 $x-1\geqslant0$ 和 $x-1\leqslant0$ 两种情况分别求出方程的解，再求出所有解得和即可.

【解答】解：若 $x\geqslant1$，则 $x-1\geqslant0$，原方程可变为：x^2-3（$x-1$）$-1=0$，

即：$x^2-3x+2=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=2$，