【高中数学竞赛真题•强基计划真题考前适应性训练】

专题15 导数与极限 真题专项训练（全国竞赛+强基计划专用）

一、单选题

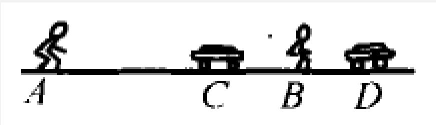
1．（2018·全国·高三竞赛）一个人以匀速$6m/s$去追停在交通灯前的汽车，当他离汽车$25m$时，交通灯由红变绿，汽车以$1m/s^2$的加速度匀加速开走，那么（　）.

A．人可在$7s$内追上汽车　　B．人可在$10s$内追上汽车

C．人追不上汽车，其间最近距离为$5m$　　D．人追不上汽车，其间最近距离为7m

【答案】D

【详解】如图，设汽车在点C开始运动，此时人通过点A．经过t秒后，汽车到达D点，有路程$CD=\frac{1}{2}at^2$；



人此时追到点B，有路程$AB=vt$．

依题意两者的距离是

$S=AC+CD-AB=25+\frac{1}{2}at^2-vt=\frac{1}{2}t^2-6t+25=\frac{1}{2}(t-6)^2+7\geq 7$．

可见，人不能追上汽车，他与汽车最近距离是在汽车开动$6s$后的瞬间，两者距离为$7m$．

2．（2022·全国·高三专题练习）设$E(x)$是离散型随机变量的期望，则下列不等式中不可能成立的是（　）

A．$E(X+\ln X)>E(X)+\ln(E(X))$　　B．$E(X^2\ln X)>E^2(X)\ln(E(X))$

C．$E(X+\sin X)>E(X)+\sin(E(X))$　　D．$E(X^2\sin X)>E^2(X)\sin(E(X))$

【答案】A

【分析】根据各选项的期望，分别判断$y=x+\ln x$、$y=x^2\ln x$、$y=x+\sin x$、$y=x^2\sin x$在定义域内是否存在下凹区间即可.

【详解】A：由$y=x+\ln x$且定义域为$(0,+\infty)$，则$y'=1+\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}<0$，即y为上凸函数，有$\frac{x_1+\ln x_1+x_2+\ln x_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}+\ln\frac{x_1+x_2}{2}$，所以$E(X+\ln X)<E(X)+\ln(E(X))$；

B：由 $y=x^2\ln x$ 且定义域为 $(0,+\infty)$，则 $y'=2x\ln x+x$，$y''=2\ln x+3$，显然 $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上 $y''>0$，即 y 在 $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 为下凹函数，$\frac{x_1^2\ln x_1+x_2^2\ln x_2}{2}>(\frac{x_1+x_2}{2})^2\ln\frac{x_1+x_2}{2}$，所以存在 $E\left(X^2\ln X\right)>E^2\left(X\right)\ln\left(E\left(X\right)\right)$；

C：由 $y=x+\sin x$，则 $y'=1+\cos x$，$y''=-\sin x$，显然在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$，$k\in Z$ 上 $y''>0$，即 y 在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$，$k\in Z$ 为下凹函数，有 $\frac{x_1+\sin x_1+x_2+\sin x_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}+\sin\frac{x_1+x_2}{2}$，所以存在 $E\left(X+\sin X\right)>E\left(X\right)+\sin\left(E\left(X\right)\right)$；

D：由 $y=x^2\sin x$，则 $y'=2x\sin x+x^2\cos x$，$y''=(2-x^2)\sin x+4x\cos x$，显然存在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $y''>0$，即 y 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 为下凹函数，有 $\frac{x_1^2\sin x_1+x_2^2\sin x_2}{2}>(\frac{x_1+x_2}{2})^2\sin\frac{x_1+x_2}{2}$，所以存在 $E(X^2\sin X)>E^2(X)\sin\left(E\left(X\right)\right)$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：利用函数二阶导数的几何意义判断各选项对应函数定义域内是否存在下凹区间即可.

二、填空题

3.（2021·上海·统考模拟预测） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{1+2+\cdots+n}}=$ ______

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】把分子分母都放在根号下，再同时除以 n^2 即可.

【详解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{1+2+\cdots+n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(2n+1)^2}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}}=2\sqrt{2}$

故答案为: $2\sqrt{2}$

4.（2019·全国·高三竞赛） 函数 $y=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的最大值是______.

【答案】$\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

【详解】设 $x=\cos\alpha\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$.则 $x\in(0,1)$.

由 $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$，得 $y'=\frac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x)}$.

令 $y'=0$.解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（舍去负根）.

故 $y_{\max}=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

故答案为 $\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$

5.（2018·全国·高三竞赛）对 $0<x<1$，若复数 $z=\sqrt{x}+i\sqrt{\sin x}$ 对应的点有 n 个在单位圆上，则 $n=$______.

【答案】1

【详解】由点在单位圆上有 $x+\sin x=1(0<x<1)$.

作函数 $\varphi(x)=x+\sin x-1(x\in(0,1)$.

由 $\varphi'(x)=1-\cos x>0(x\in(0,1))$，知 $\varphi(x)$ 为严格递增函数.

又 $\varphi(0)=-1\langle 0,\varphi(1)=\sin 1\rangle 0$，故方程 $x+\sin x=1$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个实根.

因此，$n=1$.

6.（2018·全国·高三竞赛）抛一颗色子三次，所得点数分别为 m、n、p.则函数 $y=\frac{2}{3}mx^3-\frac{n}{2}x^2-px+1$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数的概率为______.

【答案】$\frac{11}{24}$

【详解】注意到，$f(x)=\frac{2}{3}mx^3-\frac{n}{2}x^2-px+1$

在 $[1,+\infty)$ 上为增函数等价于 $f'(x)=2mx^2-nx-p>0$

在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $f'(1)>0$，即 $2m>n+p$.

当 $m=2$ 时，$n+p\le 3$，有 3 种；当 $m=3$ 时，$n+p\le 5$，有 10 种；

当 $m=4$ 时，$n+p\le 7$，有 21 种；当 $m=5$ 时，$n+p\le 9$，有 30 种；

当 $m=6$ 时，$n+p\le 11$，有 35 种.

故所求概率为 $\frac{3+10+21+30+35}{6^3}=\frac{11}{24}$.

7.（2018·全国·高三竞赛）已知函数 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，其中，$x\in\left[-\frac{2011\pi}{2},\frac{2013\pi}{2}\right]$.过点 $M\left(\frac{\pi-1}{2},0\right)$ 作函数 $f(x)$ 图像的切线，令各切点的横坐标构成数列 $\{x_n\}$.则数列 $\{x_n\}$ 的所有项之和 S 的值为______.

【答案】1006π

【详解】设切点坐标为$\left(x_0,e^{x_0}\left(\sin x_0+\cos x_0\right)\right)$.

则切线方程为$y-e^{x_0}\left(\sin x_0+\cos x_0\right)=2e^{x_0}\cos x_0\cdot\left(x-x_0\right)$.

将点$M\left(\frac{\pi-1}{2},0\right)$的坐标代入切线方程得

$-e^{x_0}\left(\sin x_0+\cos x_0\right)=2e^{x_0}\cos x_0\cdot\left(\frac{\pi-1}{2}-x_0\right)$

$\Rightarrow \tan x_0+1=2\left(x_0-\frac{\pi-1}{2}\right)$ $\Rightarrow \tan x_0=2\left(x_0-\frac{\pi}{2}\right)$.

令$y_t=\tan x$，$y_2=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

则这两个函数的图像均关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称，其交点的横坐标也关于$x=\frac{\pi}{2}$对称成对出现，

方程$\tan x=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x\in\left[-\frac{2011\pi}{2},\frac{2013\pi}{2}\right]\right)$的根，即所作的所有切线的切点横坐标构成

的数列$\{x_n\}$的项也关于α对称成对出现，在$\left[-\frac{2011\pi}{2},\frac{2013\pi}{2}\right)$内共构成 1006 对，每对

的和均为π.因此，数列$\{x_n\}$的所有项的和$S=1006\pi$.

8．（2021·全国·高三竞赛）若数列$\{a_n\}$是首项不为零的等差数列，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=$__________.

【答案】1 或 3##3 或 1.

【详解】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=-1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}$，

若$\{a_n\}$为常数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=-1+2=1$；

若$\{a_n\}$不为常数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=-1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_n}=-1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_1+\frac{2(2n-1)}{2}\times d}{a_1+\frac{(n-1)}{2}\times d}=3$，

故答案为：1 或 3.

9．（2022·江苏南京·高三强基计划）设$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则函数$y=\sin^2 x\cos x$的最大值为

__________.

【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

【详解】$y=\sin^2 x\cos x=-\cos^3 x+\cos x$，

令$t=\cos x\in(0,1)$，所以$y=-t^3+t$，

$y' = -3t^2 + 1$，

则 $t \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时， nnn $y' > 0$n ； $t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 时， $y' < 0$，

所以 $y = -t^3 + t$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上增， $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 上减，

$y_{\max} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$，

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

10．（2022·浙江·高二竞赛）已知函数 $y = e^{-ax} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + b$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{3x}{2}$，则 $a+b$=______.

【答案】 -1

【详解】由函数的解析式可得 $y' = -ae^{-ax} - \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$，

则 $y'|_{x=0} = -a - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$， 解得 $a = -1$，

当 $x = 0$ 时， $y = -\frac{3x}{2} = 0$， 即切点坐标为 $(0,0)$，

故 $e^{-a\times 0} + \frac{1}{\sqrt{0+1}} + b = 0$， 解得 $b = -2$，

$\therefore a + b = -1$.

故答案为： -1.

11．（2019·全国·高三竞赛）已知过点 $(0,2)$ 的直线 l 与曲线 $C: y = x + \frac{1}{x}(x > 0)$ 交于两不同的点 M、N.则曲线 C 在 M、N 处切线交点的轨迹为______.

【答案】 $x = 1$， $1 < y < 2$.

【详解】设 $M(x_1, y_1)$， $N(x_2, y_2)$， 点 M、N 处的切线为 l_1、l_2， 交点坐标为

$P(x_p, y_p)$， 直线 l 的方程为 $y = kx + 2$.

由 $\begin{cases} y = x + \frac{1}{x}, \\ y = kx + 2 \end{cases} \Rightarrow (k-1)x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 4(k-1) > 0 \Rightarrow k > 0$.

而 $x_1 + x_2 = \frac{2}{1-k} > 0$， $x_1 x_2 = \frac{1}{1-k} > 0 \Rightarrow 0 < k < 1$.

易知 l_1 的方程为 $y - y_1 = \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)(x - x_1) \Rightarrow y = \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)x + \frac{2}{x_1}$.

同理，$l_2: y=\left(1-\frac{1}{x_2^2}\right)x+\frac{2}{x_2}$.

故 $x_1 \neq x_2$， $x_p=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=1$.

又 $y_p=\frac{1}{2}\left\{\left[2-\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)\right]x_p+2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right\}=-kx_p+2=2-k \Rightarrow 1<y_p<2$.

故所求交点的轨迹为 $x=1$， $1<y<2$.

故答案为 $x=1$， $1<y<2$.

12．（2019·全国·高三竞赛）设 $a>1$．则当 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 两个函数图像相切时，$\ln\ln a=$______.

【答案】-1

【详解】因为两个函数互为反函数，且关于直线 $y=x$ 对称，

所以，相切时切点在 $y=x$ 上.

设切点为 (x_0, y_0)．则

$x_0=a^{x_0}$， ①

$a^{x_0}\ln a=1$． ②

将式①代入式②得 $x_0\ln a=1$，即 $\ln a^{x_0}=1$． ③

再将式①代入式③得 $\ln x_0=1 \Rightarrow x_0=e$.

故 $\ln a=\frac{1}{e} \Rightarrow \ln\ln a=-1$.

13．（2019·全国·高三竞赛）设函数 $f(x)=x\log_2 x+(a-x)\log_2(a-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称．则对满足 $\sum_{i=1}^{4}x_i=1$ 的任意实数 $x_i\in(0,1)(1\le i\le 4)$， $s=\sum_{i=1}^{4}x_i\log_2 x_i$ 的最小值为__________.

【答案】-2

【详解】由题意，知定义区间 $(0,a)$ 的中点为 $\frac{1}{2}$.于是， $a=1$.

则 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$

$\Rightarrow f'(x)=\log_2\frac{x}{1-x}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

由对任意的 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 有 $f'(x)<0$，及对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 有 $f'(x)>0$

知 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

记 $x_1+x_2=x\in(0,1)$

则 $x_3+x_4=1-x\in(0,1)$ ①

由 $\frac{x_1}{x}+\frac{x_2}{x}=1$，得 $\frac{x_1}{x}\log_2\frac{x_1}{x}+\frac{x_2}{x}\log_2\frac{x_2}{x}=f\left(\frac{x_1}{x}\right)\geq -1$

即 $x_1\log_2 x_1+x_2\log_2 x_2\geq -x+x\log_2 x$．

类似地，由式①得 $x_3\log_2 x_3+x_4\log_2 x_4\geq -(1-x)+(1-x)\log_2(1-x)$．

两式相加得 $\sum_{i=1}^{4}x_i\log_2 x_i\geq -1+f(x)\geq -2$．

当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$ 时，上式等号成立.

故 $S_{\min}=-2$．

故答案为 -2

14．（2019·全国·高三竞赛）满足 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{2014}\right)^{2014}$ 的整数 n=__________.

【答案】-2015

【详解】注意到，对任意的 $x\in(-1,+\infty)$ 有 $\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$

则 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}(x>0)$ 与 $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}(x>0)$ 的导函数分别为

$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]<0$， $g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]>0$．

故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上递减， $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上递增.

且对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 有 $f(x)>e>g(x)$．

从而，对任意的 m、n$\in Z_+$ 有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e>\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$．

因此，满足 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{2014}\right)^{2014}$ 的整数 n 必为负数.

记 $n=-k\left(k\in Z_+\right)$，代入题设等式得 $\left(1+\frac{1}{2014}\right)^{2014}=\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k+1}=\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$．

故 $k-1=2014$， $n=-k=-2015$．

故答案为-2015

15．（2018·全国·高三竞赛）已知函数 $f\left(x\right)$ 的导函数 $f'\left(x\right)$ 连续,且 $f\left(0\right)=0,\ f'\left(0\right)=a$.记曲线 $y=f(x)$ 与 $P\left(t,0\right)$ 最近的点为 $Q\left(s,\mathrm{f}\left(s\right)\right)$.则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{s}{t}=$______.

【答案】$\frac{1}{1+a^2}$

【详解】记 $y=PQ^2=\left(x-t\right)^2+f^2\left(x\right)$.则 $y'=2\left(x-t\right)+2f\left(x\right)f'\left(x\right)$.

由已知得 $2\left(s-t\right)+2f\left(s\right)f'\left(s\right)=0$.

则 $\frac{s}{t}=1-\frac{f\left(s\right)f'\left(s\right)}{t}=1-\frac{s}{t}\cdot\frac{f\left(s\right)}{s}f'\left(s\right)$. ①

记 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{s}{t}=A$.而 $\lim\limits_{s\to 0}\frac{f\left(s\right)}{s}=f'\left(0\right)=a$, 故 $\lim\limits_{s\to 0}f'\left(s\right)=a$.

对式①两边取极限得 $A=1-a^2A\Rightarrow A=\frac{1}{1+a^2}\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\frac{s}{t}=\frac{1}{1+a^2}$

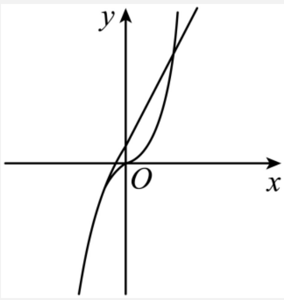
16．（2022·江苏南京·高三强基计划）已知直线 $y=ax+2$ 与三次曲线 $y=x^3-ax$ 有三个不同交点，则 a 的取值范围为___________.

【答案】$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

【详解】依题意得：$ax+2=x^3-ax$,即 $x^3=2ax+2$ 有三个不同解,

考虑 $y=2ax+2$ 与 $y=x^3$ 相切于 $P\left(x_0,y_0\right)$,

则 $\begin{cases}x_0^3=2ax_0+2\\2a=3x_0^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-1\\a=\frac{3}{2}\end{cases}$,



结合图象可知：$a\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

故答案为：$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

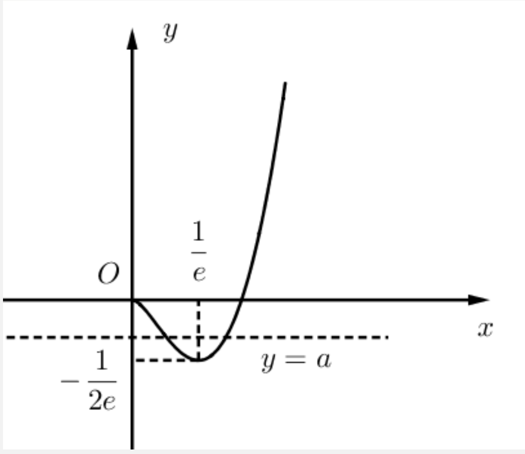
17．（2021·浙江·高三竞赛）若 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2$，$x_1<x_2$，$k=\frac{5}{2}\left(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\right)$，$k\in\mathrm{Z}$，则 $k=$_______.

【答案】3

【详解】解析:由题意知设 $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2,y=t^2\ln t^2=2t^2\ln t$,

问题转化为:若$t_1^2\ln t_1=t_2^2\ln t_2,t_1<t_2$,求$k=\frac{5}{2}\left(t_1^2+t_2^2+2t_1t_2\right)=\frac{5}{2}(t_1+t_2)^2$,

即$y=t^2\ln t$与$y=a$的图象的两个公共点的横坐标设为t_1,t_2求t_1+t_2的范围;



如图所示，易知$t_1+t_2\in\left(1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right]$,所以$k\in\left(\frac{5}{2},\frac{10}{e}\right]$,所以$k=3$.

故答案为：3.

三、解答题

18.（2021·全国·高三竞赛）已知三次函数$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，满足对任意$x\in[-2,2]$都有$|f(x)|\le 2$，求$a$、$b$、$c$的所有可能值.

【答案】$a=c=0,b=3$.

【详解】由题意得：

$$\begin{cases}-2\le f(2)=-8+4a+2b+c\le 2,① \\ -2\le f(-2)=8+4a-2b+c\le 2,② \\ -2\le f(1)=-1+a+b+c\le 2, \quad ③ \\ -2\le f(-1)=1+a-b+c\le 2, \quad ④\end{cases}$$

由①−②,③−④得：

$$\begin{cases}-4\le -16+4b\le 4, \\ -4\le -2+2b\le 4,\end{cases}\text{即}\begin{cases}3\le b\le 5, \\ -1\le b\le 3,\end{cases}\text{所以}b=3.$$

将$b=3$代入①，②，③，④得：

$$\begin{cases}0\le 4a+c\le 4, \\ -4\le 4a+c\le 0, \\ -4\le a+c\le 0, \\ 0\le a+c\le 4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+c=0, \\ a+c=0,\end{cases}\Rightarrow a=c=0.$$

下面证明$f(x)=-x^3+3x$符合题意，

由 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)>0 \Rightarrow -1<x<1, f'(x)<0 \Rightarrow x<-1$ 或 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,-1],[1,2]$ 单调递减；在 $[-1,1]$ 单调递增，

且 $f(-2)=2, f(-1)=-2, f(1)=2, f(2)=-2$，

所以 $f(x)=-x^3+3x$ 符合题意，

a、b、c 的所有可能值为 $a=c=0, b=3$.

19．（2023·全国·高三专题练习）求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{\sec x-\cos x}$.

【答案】(1) $-\frac{1}{2}$

(2)0

(3)1

【分析】（1）先将题给代数式转化为 $\frac{0}{0}$ 型分式，再利用洛必达法则即可求得其值；

（2）先将题给代数式转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型分式，再利用洛必达法则即可求得其值；

（3）利用已知重要极限和洛必达法则即可求得其值.

【详解】（1）令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

由洛必达法则可得，

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{2t(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{-1}{2(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=-\frac{1}{2}$

（2）令 $t=\frac{1}{x^2}$，