第二章 群的基本理论

2.1 群的概念

1. 群的定义

假设G是由一些元素组成的集合，即G={…,g,…},在G中各元素间定义了一种合成规则(操作，运算，群的乘法). 如果G对这种合成规则满足以下四个条件:

a）封闭性. G中任意两个元素的乘积仍然属于G. 即对任意 $f,g\in G$,必有 $fg=h\in G.$

b）结合律. 即对任意 $f,g,h\in G$,都有:

$$(fg)h=f(gh).$$

c) 有唯一的单位元素．集合G中存在一个单位元素 e，对任意元素 $f \in G$，有：

$$ef = fe = f$$

d) 可逆性．对任意元素 $f \in G$，存在逆元素 $f^{-1} \in G$，使

$$f^{-1}f = ff^{-1} = e$$

则称集合G为一个群.

由定义可知基本性质：

1、单位元的逆元为单位元本身，逆元的逆就是群元本身

2、乘积的逆元 $(g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1}$

例1：全部正负整数（包括零），群乘为代数的加法运算，单位元为0，逆元为其负数，构成群。

例2. 置换群

以变换位置的操作为群元，以相继操作为群乘，构成置换群

例：Z_3 群 (三位置置换群)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ 表示将 1、2、3 处之物分别放於 2、3、1 处，

Z_3群由以下六元素构成:

$$e=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\quad a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad d=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

可以证明它们符合群的四个基本条件.

例3.矩阵群:

以矩阵为群元，以矩阵乘法为群乘，构成矩阵群

例 d_3 群

$$e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad a=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

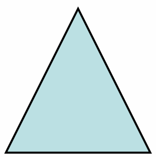
$$c=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad d=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad f=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

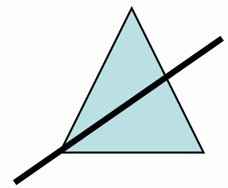
封闭性： $a\,d = b,\quad b\,d = c,\quad d^2 = ?$

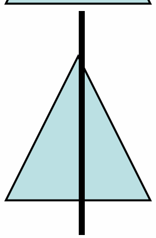
例4. 对称群

以对称操作为群元，以相继操作为群乘，构成对称群

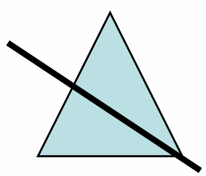
例 D_3 群

E  不动

C  绕C轴转180°

A  绕A轴转180°

D 顺时针转120°

B  绕B轴转180°

F 逆时针转120°

一般的对称操作群：分子点群, 晶体点群, 旋转群, 置换群

2. 群论中的基本概念

(1). **群的阶:** 指一个群中元素的个数;

(2). **有限群与无限群:** 指阶为有限及无限的群;

(3). **离散群:** 群的元素个数是可数有限的群;

(4). **连续群:** 群的元素的个数是不可数无限的群;

(5). **阿贝尔群:** 群中任意两元素对乘法对易,即满足

$$AB = BA$$ 群.

3. 群的具体例子

(1) 由实数 $+1$，-1 组成了以普通乘法作为合成法则的二阶群。

(2) 由复数 $1, i, -1, -i$ 组成了在普通乘法下的四阶有限群。

(3) 在普通加法下，所有整数组成了分立无限群.

(4) 在普通乘法下，所有不为零的正实数组成了连续无限群。

(5) 只包含单位元的单一点集是在乘法下的一阶群。

(6) 在矩阵乘法下 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 两个矩阵组成了二阶有限群。

(7) 若 k 是一正整数，由 k 个整数 $(0,1,2,\cdots,k-1)$ 组成的集合是对于模 (k) 的加法群，其中模 (k) 的加法是指二数相加后除以 k，再取余数。例如，令 $k=10$，则 $(7+5)=2$。

(8) 设 E 和 I 对三维实空间 R^3 中向量 r 的作用为 $Er=r$, $Ir=-r$ 即 E 是保持 r 不变的恒等变换, I 是使 r 反演的反演变换. 定义群的乘法为从右到左连续对 r 作用, 则集合 $\{E,I\}$ 构成反演群, 即空间反演操作和恒等操作组成一个二阶有限变换群。

(9) R_n 是晶体中任何格矢, $\vec{R}_n=n_1\vec{a}_1+n_2\vec{a}_2+n_3\vec{a}_3$ 其中 a_1,a_2,a_3 是原胞的基矢，n_1,n_2,n_3 是任何整数，根据固体物理知识，知道平移 R_n 与平移 R_m 的次序无关，即：$r+R_n+R_m=r+R_m+R_n$

如令 T_n,T_m 分别代表平移 R_n 与平移 R_m 的操作，显然有

$$T_nT_m=T_mT_n$$

所有这些平移操作，构成的群称为平移群，可见该群是阿贝尔群。

(10) 绕一个固定轴转动任何角度的一些操作组成群，称为轴转动群

如，可令转动 α 角的操作为 R_α，转动 α' 角的操作为 $R_{\alpha'}$，

有： $R_\alpha R_{\alpha'} = R_{\alpha+\alpha'} = R_{\alpha'+\alpha} = R_{\alpha'} R_\alpha$

因此，轴转动群也是阿贝尔群。

作业：试证明任何二阶群都是阿贝尔群。

4. 对称变换群

（1）对称：一个物体包含若干等同部分，对应部分相等。

（2）对称操作：使物理系统保持不变的变换。

对称操作

旋转、反映、反演、象转、反转。

算符表示

$$\hat{C}_n, \hat{\sigma}_v, \hat{\sigma}_h, \hat{S}_n, \hat{i}, \hat{E}, \hat{I}_n$$

基本对称操作：旋转和反映。

对称元素：

完成对称操作所关联的几何元素（点、线、面及其组合）

旋转轴， 镜面，对称中心，映轴，反轴

符号

$$C_n, \sigma_v, \sigma_h, S_n, i, E, I_n$$

基本对称元素：对称轴和对称面

（3）对称性群：一个系统的所有对称变换组成的群。

定理1：一个系统的所有对称变换的集合是一个群。

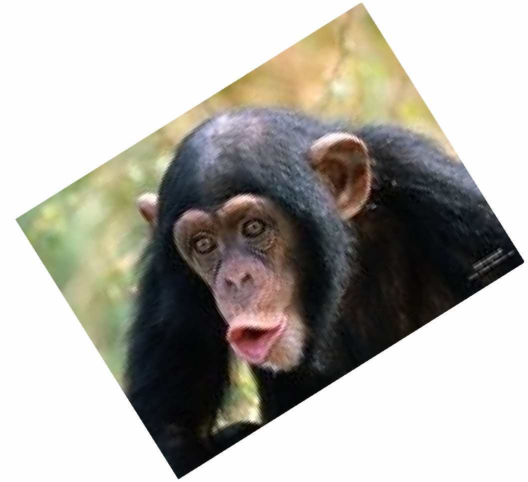
证明：（a）如果逐次施行两次对称变换，系统仍保持不变，因此系统的任意两个对称变换的合成，仍然是一个对称变换，即所考虑的集合对逐次变换是封闭的。

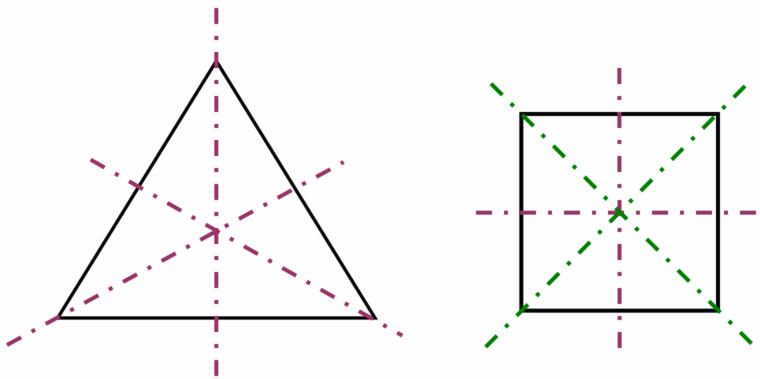
（b）我们可以把对系统不进行变换定义为恒等变换，它显然 属于这个集合。

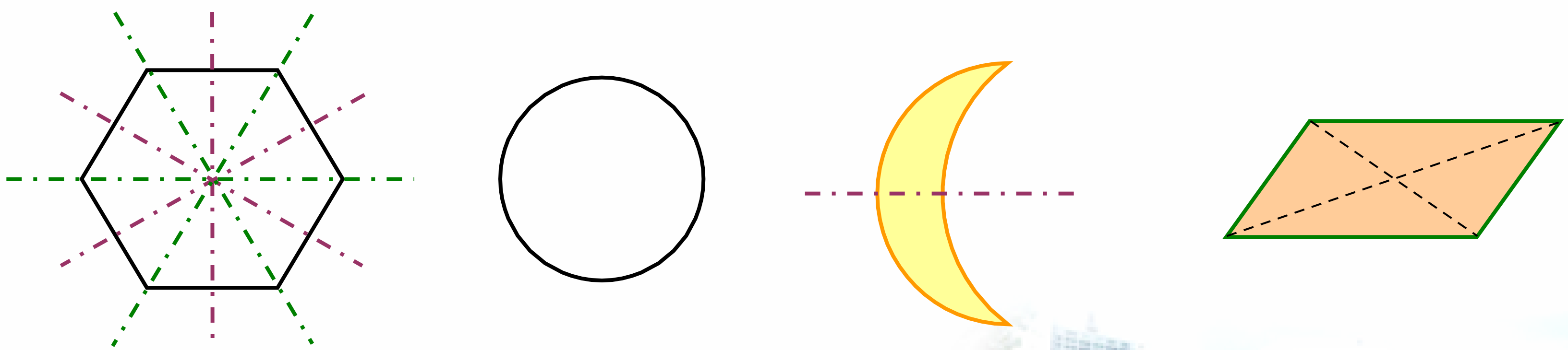
（c）给定一对称变换，就有一个也属于此集合的逆变换。

（d）显然，系统的逐次变换服从结合律。

所以由一个系统的所有对称变换的集合是一个群。





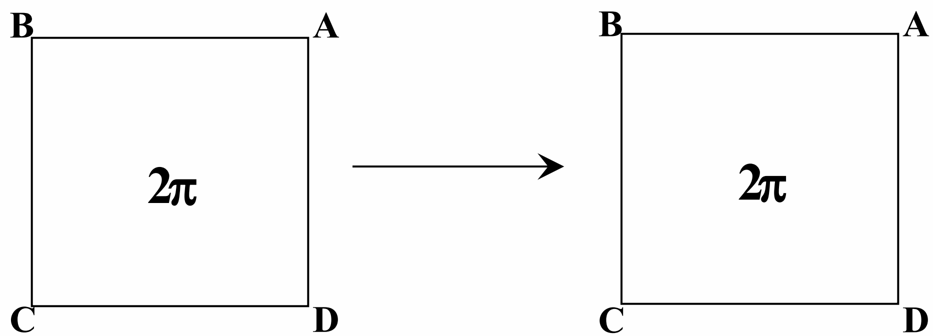


例.正方形的对称性群

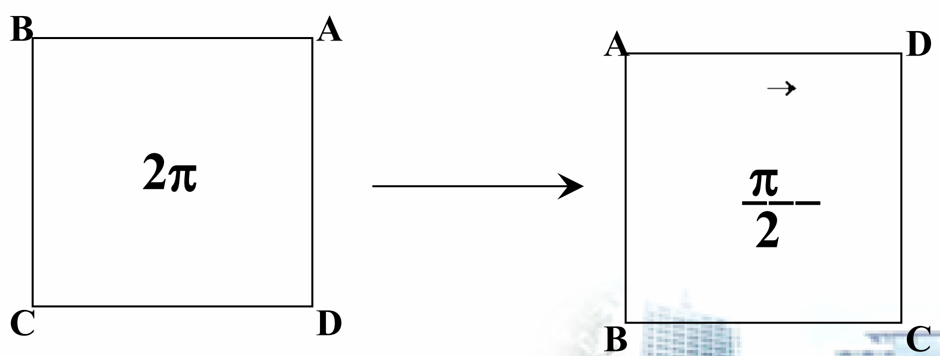
（1）平面上正方形ABCD的对称变换群

$$S(K) = \{\ \varphi_1\ ,\ \varphi_2\ ,\ \varphi_3\ ,\ \varphi_4\ ,\ \varphi_5\ ,\ \varphi_6\ ,\ \varphi_7\ ,\ \varphi_8\ \}$$

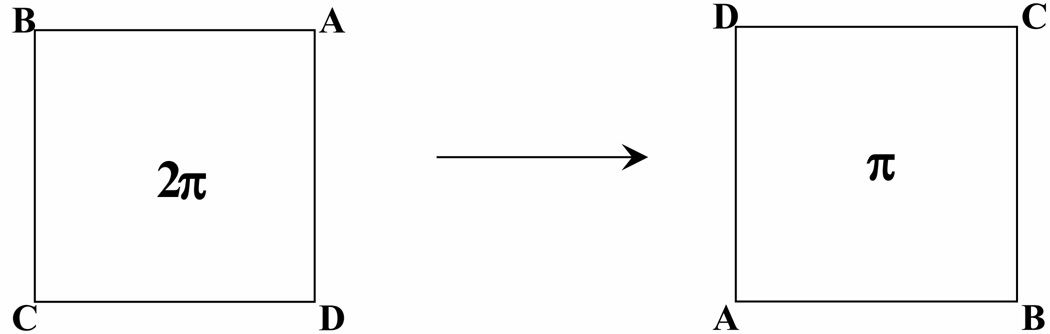
φ_1:



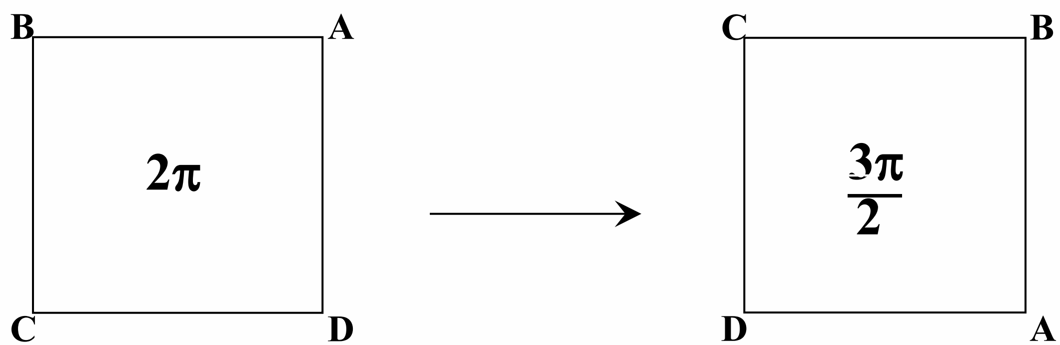
φ_2:



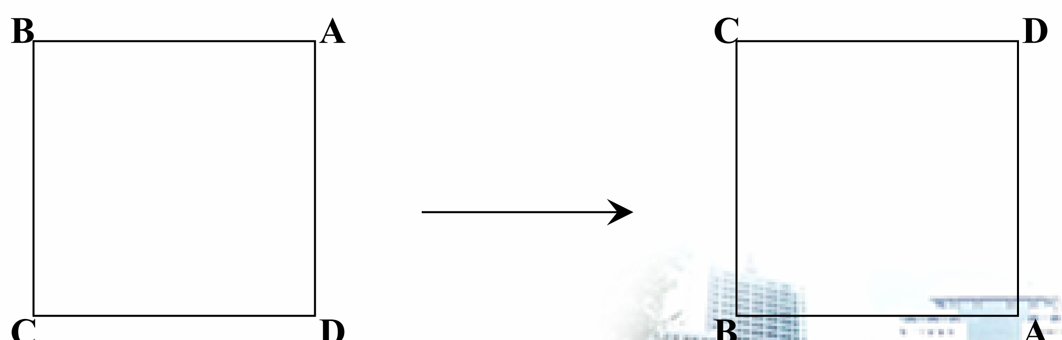
φ_3:



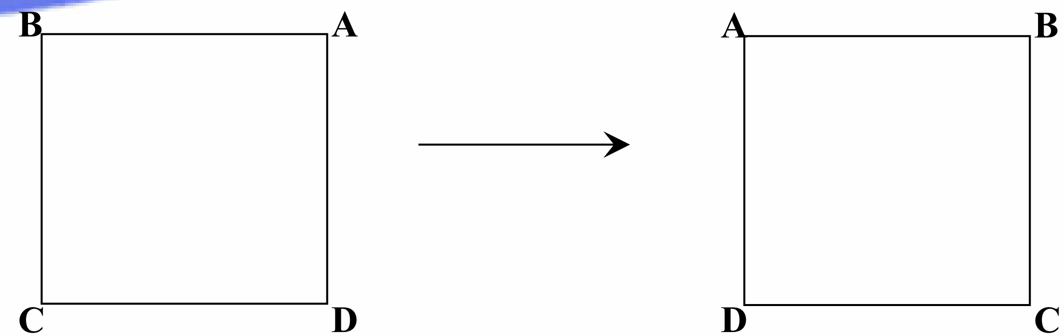
φ_4:



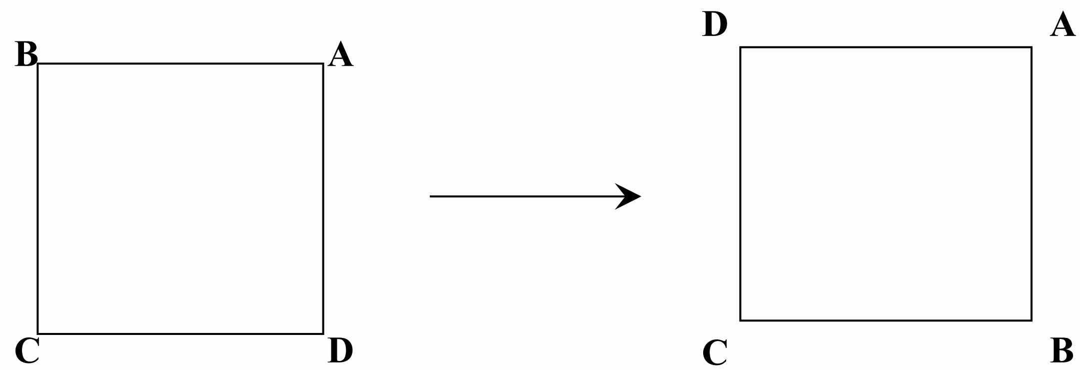
φ_5:



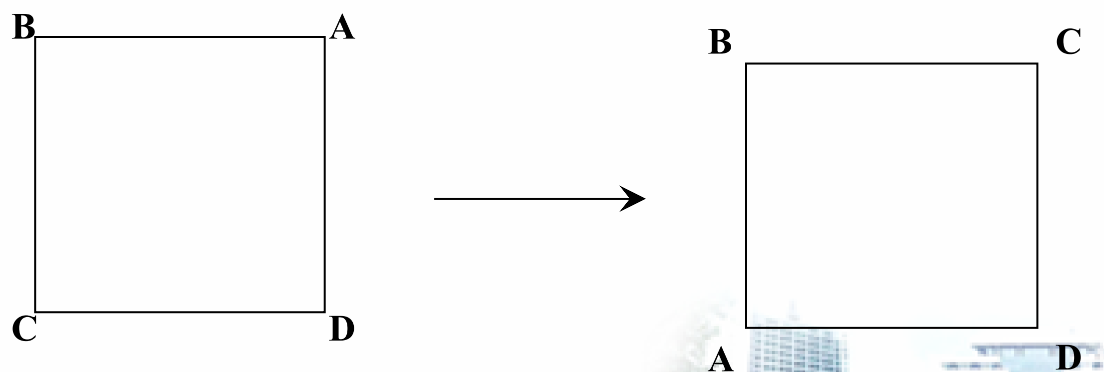
φ_6:



φ_7:

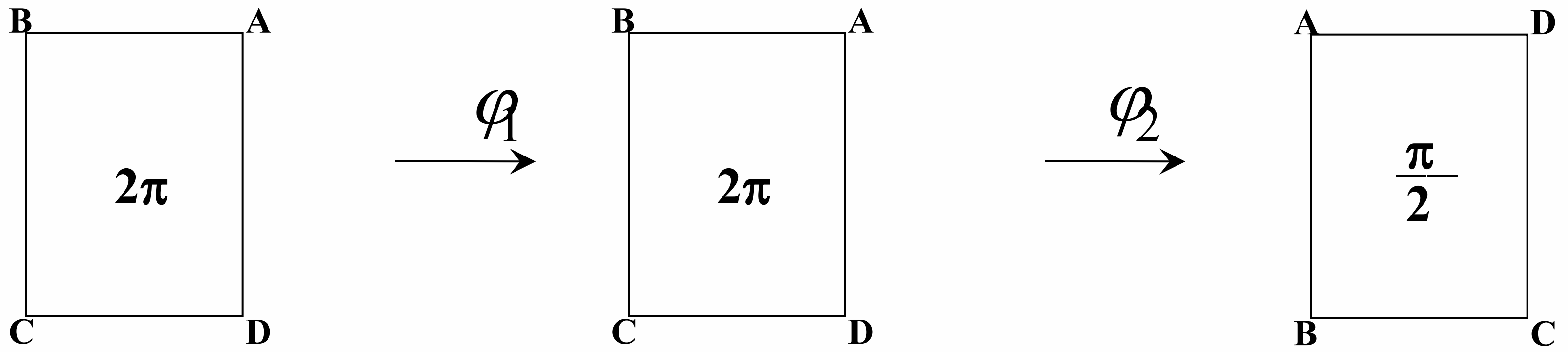


φ_8:

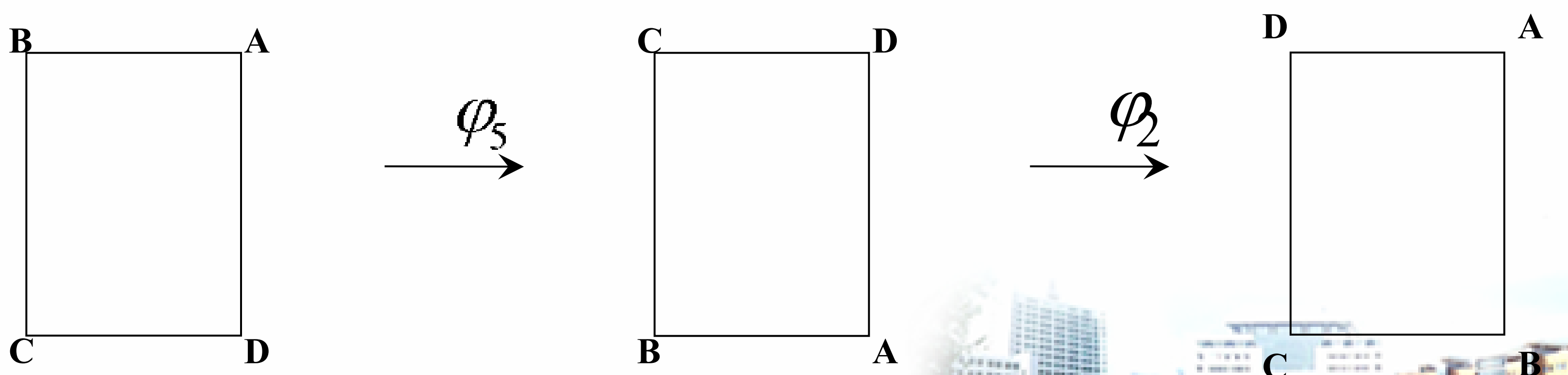


（2）运算举例

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

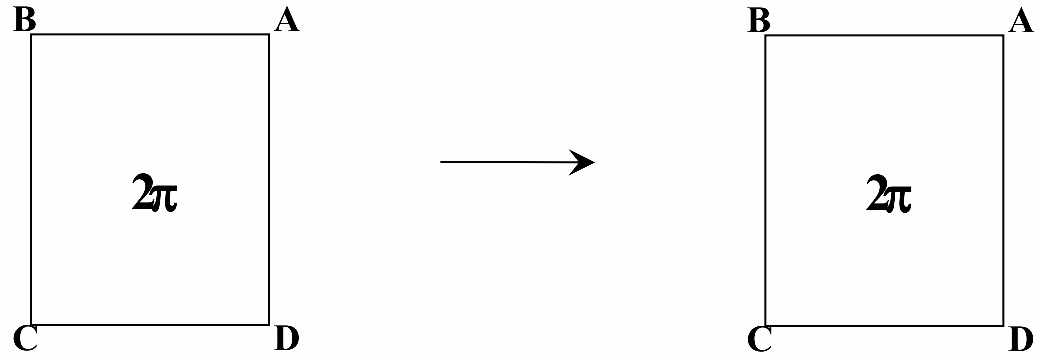


$$\varphi_2 \circ \varphi_5 = \varphi_7$$

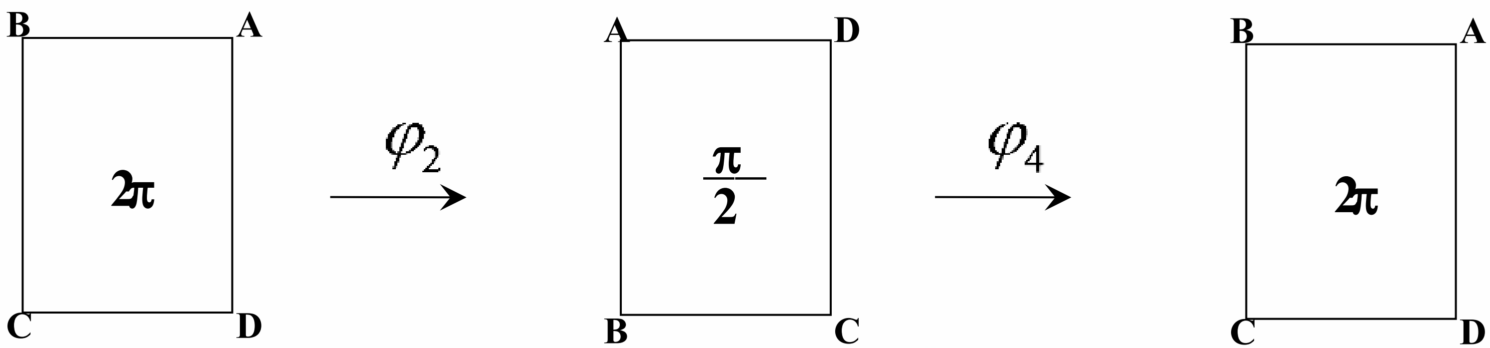


（3）单位元 φ_1

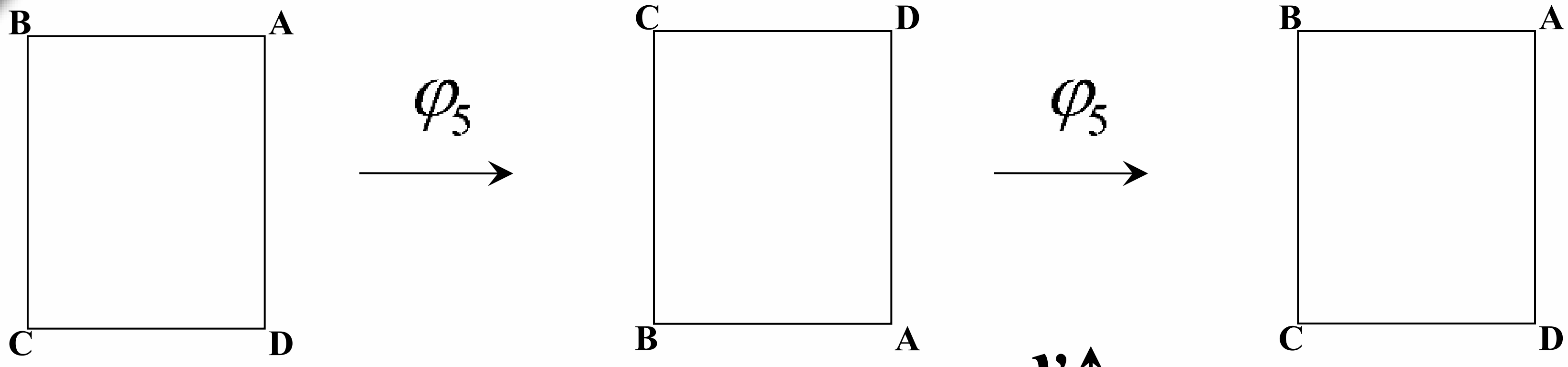
φ_1：



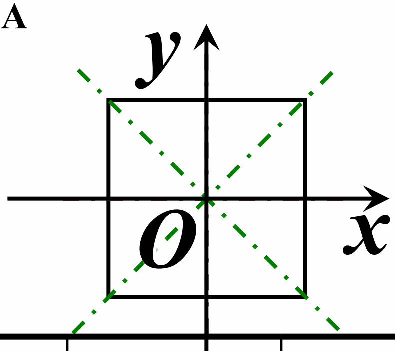
（4）逆元 $\varphi_2^{-1} = \varphi_4$



$$\varphi_5^{-1}=\varphi_5$$



$$f_i(\alpha)=Q_i\alpha$$



恒等							
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

2.2 群的乘法表

如果知道群的元素为 n，其所有可能的乘积为 n^2，则此群被完全而唯一地确定。n为群的阶数，即物体中等同部分的数目。

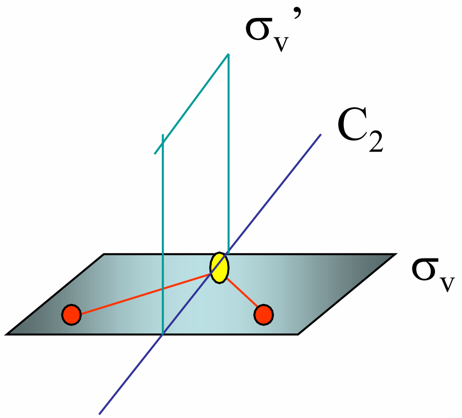
把群元素的乘积列为表，则得到乘法表。设列元素为A，行元素为B，则乘积为AB，列×行，行元素B先作用，列元素A后作用。

例：H_2O 对称元素：C_2，σ_v，σ_v/ ，

对称操作： $\hat{C}_2, \hat{\sigma}_v, \hat{\sigma}_v', \hat{E}$

乘法表

C_{2v}	$\hat{E}$	$\hat{C}_2$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v'$
$\hat{E}$	$\hat{E}$	$\hat{C}_2$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v'$
$\hat{C}_2$	$\hat{C}_2$	$\hat{E}$	$\hat{\sigma}_v'$	$\hat{\sigma}_v$
$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v'$	$\hat{E}$	$\hat{C}_2$
$\hat{\sigma}_v'$	$\hat{\sigma}_v'$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{C}_2$	$\hat{E}$



例.正方形的对称性群

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_2	f_2	f_3	f_4	f_1	f_8	f_7	f_5	f_6
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2				
f_4	f_4	f_1	f_2	f_3				
f_5	f_5				f_1			
f_6	f_6					f_1		
f_7	f_7						f_1	
f_8	f_8							f_1

例：平面正三角形对称群 D_3 （又称为6阶二面体群）

考虑重心在原点，底边与 x 轴平行的 xy 平面上的正三角形 ΔABC，如图，保持正三角形不变的空间转动操作有：

E：恒等操作； D：绕 z 轴旋转 $2\pi/3$ ； F：绕 z 轴旋转 $4\pi/3$

A：绕轴1旋转 π； B：绕轴2旋转 π； C：绕轴3 旋转 π .

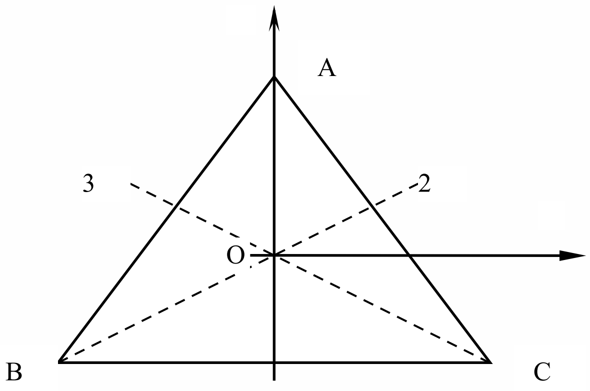
定义两个转动操作的乘积，如 AB 为先实行操作 B，再实行操作 A。

可知在上述乘法定义下，保持正三角形不变的全体转动操作构成群

$$D_3 = (E, D, F, A, B, C)$$

它的乘法表为：

D_3	$\hat{E}$	F	D	A	B	C
$\hat{E}$	$\hat{E}$	F	D	A	B	C
D	D	E	F	C	A	B
F	F	D	E	B	C	A
A	A	C	B	E	D	F
B	B	A	C	F	$\hat{E}$	D
C	C	B	A	D	F	$\hat{E}$



（a）

(b)

问题：D_3 群是不是阿贝尔群？

平面正三角形对称轴
与对称平面

说明：

① n价的乘法是n×n的正方形表，各行各列都分别用群的一个元素标记。

② 乘法表不一定满足交换率，故在a_i标记的行与a_j标记的列的交点位置上放置的元素是乘积元素 a_ia_j。

③只有Abel群主对角线是对称的。

重排定理

群的每个元素在乘法表的每一行（列）中出现一次且只一次。

推论

若 f 是群元素的任意函数，则：$\sum\limits_{A\in G} f(A)=\sum\limits_{A\in G} f(AB), B\in G$

其中 G 为有限群，求和遍及所有群元素。

说明

从满足一些关系的元素的某一集合出发，由群的元素相乘可以生成群的所有元素。

群的生成元

可由元素的幂和乘积生成群的所有元素的**最小集合**中的元素称为群的**生成元**。

例： 由元素 A 生成一个群，只要求 $A^n = E$ ，其中 n 是满足此关系式的最小正整数。

由于 A 是群中的一个元素，所以它的整次幂必定也在此群中。由此可生成新元素 A^2，A^3 ，…，直到 $A^n = E$ 。

更高次幂不能给出新的元素，因为 $A^{n+k} = A^k$。故所求的群

$$G = \left(A^n = E, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\right)$$

为 n 阶有限群。

例： 由元素 A 和 B 生成一个群，只要求：$A^2=B^3=(AB)^2=E$ 。

由于 $A^2=B^3=(AB)^2=E$，可知此群必包含元素 E,A,B,B^2 ，一定也包含所有 A,B,B^2 之间的乘积。

因此得到两个新元素 AB 和 BA ，容易证明，A,B 不对易。因为如果二者对易，则由关系式 $(AB)^2=E$ 将得到：

$$E=ABAB=A^2B^2=B^2$$

故 AB 和 BA 是不同的元素。

可见，由 A,B 生成了群的六个元素 E,A,B,B^2,AB,BA，易证这六个元素组成一个六阶有限群。

注意： 一个群的生成元不唯一的，可以有不同的选取方法。

2.3　共轭元素和类

共轭元素

若 A,B,C 是群的元素，当 B 和 C 两元素之间满足：

$$A^{-1}BA = C$$

则 B 和 C 叫做共轭元素。 $A^{-1}BA=C$ 叫做 B 通过 A 的相似变换，记作： $B \sim C$

性质：

1、相互性　$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

2 、传递性

定理　若 B,C,D 都是群的元素，若 B 与 C 共轭，B 又与 D 共轭，则 C 与 D 也共轭，即: $B \sim C, C \sim D \Rightarrow B \sim D$

共轭类

可以把一个群分成一些集合，使得每一集合中的所有元素相互共轭，不同集合的两元素互不共轭。这种集合叫做共轭类。

群 G所有都相互共轭的元素集合叫做群 G 的共轭类，简称类。

类的性质

（1）群 G 中的任何一个类 C 都满足 $XCX^{-1}=C, X\in G$。

（2）单位元自成一类。

（3）群中没有任何一个元是属于两个不同的类，即不同的类中没有共同的元。

（4）对于矩阵群，同一类中的各元互为相似矩阵，故同类中各元具有相同的迹。

定理一：若C是群G中一个由完整的类构成的集合，x是群中的任意元，则有 $x^{-1}Cx=C$ 成立

证：等式左边每一个元的群乘都与右边的元共轭，所以左边的每个元必然出现在右边的C中。等式右边的每个元都是不同的，由于群乘的唯一性，左边的每一个元也是不同的。这两种陈述仅当方程两边相等时才能自恰（两个集合相等的意思是两者所包含的元是完全相同的，但排列秩序可以不同）

逆定理：任何一个服从方程 $x^{-1}Cx=C$，对一切 $x\in G$ 成立的集合C必是由完整的类构成。

证：首先将C中的完整类抽出，余下元的集合是R，于是

$$x^{-1}Rx=R$$

考虑R中的某元R_i，则上式左边是R_i类的所有元，因此右边的R就是一个完整的类，这就证明了C必由完整的类构成

类的积

由群中包含 m 个元素的类 C_i 中的任一元素和另一包含 n 个元素的类 C_j 中的任一元素的积所组成的集合就叫做类的积。

令 $C_i=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$， $C_j=(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 则类的积为：

$$C_iC_j=(A_1B_1,\cdots,A_1B_n,A_2B_1,\cdots,A_lB_k,\cdots,A_mB_{n-1},A_mB_n)$$

定理二

若 η 为由群中若干完整的类构成的集合，即 $\eta=C_1+C_2+\cdots=\sum_k C_k$

X是群 G 中的任意元，则 $X\eta X^{-1}=\eta$
成立。

证明： 因为 $XC_kX^{-1}=C_k,X\in G$，所以，

$$X\eta X^{-1}=X(C_1+C_2+\cdots)X^{-1}=XC_1X^{-1}+XC_2X^{-1}+\cdots$$

$$=C_1+C_2+\cdots=\sum_k C_k=\eta$$

定理三

一个群的两个类的积可表为群的完全类之和，即：

$$C_iC_j=\sum_k a_{ijk}C_k$$

其中 a_{ijk} 是非负整数，它表征积 C_iC_j 中类 C_k 出现的次数，

求和遍及群中的所有类。

证、利用定理一，有

$$C_iC_j = x^{-1}C_ixx^{-1}C_jx = x^{-1}C_iC_jx$$

对群中一切元x成立，利用逆定理， C_iC_j是完整的类构成的，所以可写作：

$$C_iC_j = \sum_k C_{ijk}C_k$$

例：平面正三角形对称群，六个元共分为三类，可表示为

$$C_1 = E, C_2 = \{A, B, C\}, C_3 = \{D, F\}$$

于是：

$$C_1C_2 = C_2, C_1C_3 = C_3, C_2C_3 = 2C_2,$$
$$C_2C_2 = 3C_1 + 3C_3, C_3C_3 = 2C_1 + C_3$$

$$\boxed{\text{推论：群中类的积由完全类组成。}}$$

2.4　子群和陪集

子群

如果一个集合 H 的所有元素都在群 G 中，而且 H 自身也是在 G 的乘法下的一个群，则 H 叫做群 G 的一个子群，记为 $H \subset G$ 。

说明：（1）单位元和群 G 本身都是群 G 的子群，称为**平凡子群**.

（2）如果 G_1 为 G 的子群，G_2 为 G_1 的子群，则 G_2 亦为 G 的子群.

（3）群 G 中除了 E 和 G 以外的子群叫做群的**真子群**。