

第二章 函数的概念与基本初等函数

2.3 函数的奇偶性、周期性、对称性

内容索引

第一部分

必备知识 回顾



01

知识梳理



02

基础检测

第二部分

关键能力 提升



01

考点1 函数的奇偶性

02

考点2 函数的周期性

03

考点3 函数的对称性



04

考点4 函数性质的综合应用

第三部分

学科素养 聚焦

第四部分

课时作业

考试要求

1. 结合具体函数，了解奇偶性的概念和几何意义.
2. 结合函数的周期性、最小正周期的含义，会判断应用函数的周期性.

第

一

部

分

必备知识 回顾

课前预习·基础回扣

1. 函数的奇偶性

	偶函数	奇函数
定义	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = f(x)$	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = -f(x)$
图象特征	关于 <u>y 轴</u> 对称	关于 <u>原点</u> 对称

2.函数的周期性

(1)周期函数：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在一个非零常数 T ，使得对每一个 $x \in D$ 都有 $x+T \in D$ ，且 $f(x+T)=f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数. 非零常数 T 叫做这个函数的周期.

(2)最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

常用结论与知识拓展

1. 若 $f(x) \neq 0$, 则奇(偶)函数定义的等价形式如下:

$$(1) f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(-x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) \text{ 为偶函数};$$

$$(2) f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = -1 \Leftrightarrow f(x) \text{ 为奇函数}.$$

2. 函数奇偶性常用结论

(1) 如果函数 $f(x)$ 是奇函数且在 $x=0$ 处有定义, 则一定有 $f(0)=0$. 如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x)=f(|x|)$.

(2) 在公共定义域内有: 奇 \pm 奇=奇, 偶 \pm 偶=偶, 奇 \times 奇=偶, 偶 \times 偶=偶, 奇 \times 偶=奇.

3. 函数周期性常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x :

(1) 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T=2a(a>0)$.

(2) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a(a>0)$.

(3) 若 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a(a>0)$.

4. 对称性的三个常用结论

(1) 若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数, 即 $f(a-x)=f(a+x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2) 若对于 \mathbf{R} 上的任意 x 都有 $f(2a-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=f(2a+x)$, 则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(3) 若函数 $y=f(x+b)$ 是奇函数, 即 $f(-x+b)+f(x+b)=0$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 中心对称.

基础检测

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”。

(1) 偶函数的图象不一定过原点，奇函数的图象一定过原点. (×)

(2) 函数 $y=x^2(x>0)$ 是偶函数. (×)

(3) 函数 $y=|\ln x|$ 为偶函数. (×)

(4) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$ ，对称轴为直线 $x=1$. (√)

(5) 若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$. (×)

2. (教材改编题)若函数 $f(x)=x^2+(a+5)x+b$ 是偶函数, 定义域为 $[a,2b]$, 则 $a+2b$ = 0.

解析: 因为 $f(x)$ 是偶函数, 函数的定义域关于原点对称, 所以 $a+2b=0$.

3. (教材改编题) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$, 则 $f(-1) = \underline{-2}$.

解析: $f(1) = 1 \times 2 = 2$, 又 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-1) = -f(1) = -2$.

4. (教材改编题) 设 $f(x)$ 是以 2 为最小正周期的周期函数, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (x - 1)^2$, 则 $f(5) = \underline{0}$, $f\left(\frac{9}{2}\right) = \underline{\frac{1}{4}}$.

解析: $f(5) = f(1 + 2 \times 2) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2} + 2 \times 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

5. (多选题)(教材改编题)下列说法中正确的是(AB)

A. 图象关于坐标原点对称的函数是奇函数

B. 图象关于 y 轴对称的函数是偶函数

C. 函数 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是偶函数

D. 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 则一定有 $f(0)=0$

解析: 由奇函数、偶函数的性质, 知 A, B 说法正确; 对于 C, 由于偶函数的定义域关于原点对称, 故 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上不具有奇偶性, 错误; 对于 D, 由奇函数定义可知, 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x=0$ 处有意义时才满足 $f(0)=0$, 错误. 故选 AB.

第

二

部

分

关键能力 提升

课堂探究·考点精讲

考点1 函数的奇偶性

命题角度 1 函数奇偶性的判断

【例 1】 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x^3 - \frac{1}{x};$$

$$(2) f(x) = \frac{\lg(4-x^2)}{|x-2|+|x+4|};$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x > 0, \\ x^2 + 2x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

解：(1)原函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，关于原点对称，并且对于定义域内的任意一个 x 都有 $f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$ ，从而函数 $f(x)$ 为奇函数。

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} 4-x^2 > 0, \\ |x-2| + |x+4| \neq 0, \end{cases}$$

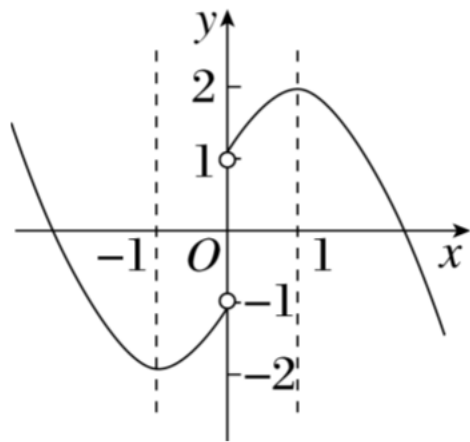
得 $-2 < x < 2$ ，即函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x|-2 < x < 2\}$ ，关于原点对称。

$$\text{因此 } f(x) = \frac{\lg(4-x^2)}{(2-x) + (x+4)} = \frac{1}{6} \lg(4-x^2), \text{ 所以 } f(-x) = f(x),$$

因此函数 $f(x)$ 是偶函数。

(3) $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 1\}$ ，关于原点对称。又 $f(-1) = f(1) = 0$ ， $f(-1) = -f(1) = 0$ ，所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数。

(4)如图,作出函数 $f(x)$ 的图象,由奇函数的图象关于原点对称的特征知函数 $f(x)$ 为奇函数.



规律总结

判断函数奇偶性的方法

(1) 定义域关于原点对称，这是函数具有奇偶性的必要不充分条件，所以首先考虑定义域；

(2) 判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 是否具有等量关系，在判断奇偶性的运算中，可以转化为判断奇偶性的等价等量关系式 $f(x) + f(-x) = 0$ (奇函数) 或 $f(x) - f(-x) = 0$ (偶函数) 是否成立。

【对点训练 1】 (2021·全国乙卷) 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是

(B)

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

解析: 因为 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 所以 $f(x-1) = \frac{1-(x-1)}{1+(x-1)} = \frac{2-x}{x}$, $f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}$.

对于 A, $F(x) = f(x-1) - 1 = \frac{2-x}{x} - 1 = \frac{2-2x}{x}$, 定义域关于原点对称, 但不满足 $F(x)$

$= -F(-x)$; 对于 B, $G(x) = f(x-1) + 1 = \frac{2-x}{x} + 1 = \frac{2}{x}$, 定义域关于原点对称, 且满足

$G(x) = -G(-x)$; 对于 C, $f(x+1) - 1 = \frac{-x}{x+2} - 1 = \frac{-x-x-2}{x+2} = -\frac{2x+2}{x+2}$, 定义域不关于原点对称; 对于 D, $f(x+1) + 1 = \frac{-x}{x+2} + 1 = \frac{-x+x+2}{x+2} = \frac{2}{x+2}$, 定义域不关于原点对称. 故选 B.

命题角度 2 函数奇偶性的应用

【例 2】 (1)若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_2(x+2) - 1$, 则 $f(-6) = (\text{C})$

A. 2

B. 4

C. -2

D. -4

解析: 根据题意得 $f(-6) = -f(6) = 1 - \log_2(6+2) = 1 - 3 = -2$. 故选 C.

(2)(2021·新高考 I 卷)已知函数 $f(x)=x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a=$ 1.

解析: 因为 $f(x)=x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且是偶函数, 所以 $f(-x)=f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $(-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $x^3(a - 1)(2^x + 2^{-x}) = 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $a=1$.

规律总结

利用函数的奇偶性求函数值的方法：将待求函数值或不等式利用奇偶性转化为已知区间上的函数值求解。

【对点训练 2】 (1)(2022·湖南长沙一模)已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^5 + 2$. 若 $f(x)$ 在区间 $[-t, t]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m = \underline{4}$.

解析: 令 $g(x) = ax^3 + bx^5$, 则 $g(x)$ 为奇函数, 当 $x \in [-t, t]$ 时, $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,
又 $f(x) = g(x) + 2$,

$$\therefore M = g(x)_{\max} + 2, \quad m = g(x)_{\min} + 2,$$

$$\therefore M + m = g(x)_{\max} + 2 + g(x)_{\min} + 2 = 4.$$

(2) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = \underline{-e^{-x} + 1}$.

解析: 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 所以 $f(-x) = e^{-x} - 1$. 又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$.

【例3】 (1)(2022·湖北恩施模拟)函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x+4)$, 若 $f(2) = 3$, 则 $f(2\ 022)$ = (**B**)

A. 3

B. -3

C. 6

D. 2 022

解析: 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x+4)$, 即 $f(x+4) = -f(x)$, 则 $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是周期函数, 周期为 8, 所以 $f(2\ 022) = f(252 \times 8 + 6) = f(6) = -f(2) = -3$.

(2)(多选题)(2022·重庆市南开中学质检)已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right)$, $f(-1) = 1$, $f(0) = -2$, 且 $f\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 为奇函数, 则(**BCD**)

- A. $f(x)$ 为奇函数
- B. $f(x)$ 为偶函数
- C. $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数
- D. $f(0) + f(1) + \cdots + f(2\ 021) = 0$

解析： 因为 $f(x) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right)$ ，所以 $f\left(x + \frac{3}{2}\right) = -f\left(x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = -f(x + 3)$ ，所以 $f(x) = f(x + 3)$ ，所以 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数，所以 C 正确；因为 $f(-1) = 1$ ， $f(0) = -2$ ，所以 $f(2) = f(-1) = 1$ ， $f(3) = f(0) = -2$ ，因为 $f\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 为奇函数，所以 $f\left(-x - \frac{3}{4}\right) = -f\left(x - \frac{3}{4}\right)$ ，所以 $f(-x) = -f\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(-2) = -f(1)$ ，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$ ，所以 $f(1) = 1$ ，所以 $f(0) + f(1) + f(2) = -2 + 1 + 1 = 0$ ，所以 $f(0) + f(1) + \cdots + f(2021) = 0$ ，所以 D 正确；因为 $f(1) = 1$ ， $f(-1) = 1$ ，所以 $f(x)$ 不可能为奇函数，所以 A 错误；因为 $f(-x) = -f\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ， $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数，所以 $f(-x) = -f\left(x - \frac{3}{2} + 3\right) = -f\left(x + \frac{3}{2}\right) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 B 正确。 故选 BCD.

规律总结

(1) 求解与函数的周期有关问题，应根据题目特征及周期定义，求出函数的周期.

(2) 利用函数的周期性，可将其他区间上的求值、求零点个数、求解析式等问题，转化到已知区间上，进而解决问题.

【对点训练 3】 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，且 $f(x+4)=f(x-2)$ 。若当 $x \in [-3, 0]$ 时， $f(x)=6^{-x}$ ，则 $f(919)=$ 6。

解析： 因为 $f(x+4)=f(x-2)$ ，所以 $f[(x+2)+4]=f[(x+2)-2]$ ，即 $f(x+6)=f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，所以 $f(919)=f(153 \times 6 + 1)=f(1)$ 。又 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，所以 $f(1)=f(-1)=6$ ，即 $f(919)=6$ 。

【例 4】 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，对任意实数 x 有 $f(x+4)=-f(x)$ ，若函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称， $f(-6)=0$ ，则 $f(2\ 022)=$ 0 .

解析： 由函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称可知，函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 为偶函数. 由 $f(x+4)=-f(x)$ ，得 $f(x+4+4)=-f(x+4)=f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期 $T=8$ 的偶函数，所以 $f(2\ 022)=f(6+252\times 8)=f(6)=f(-6)=0$.

规律总结

函数 $f(x)$ 满足的关系 $f(a+x)=f(b-x)$ 表明的是函数图象的对称性，函数 $f(x)$ 满足的关系 $f(a+x)=f(b+x)$ ($a \neq b$) 表明的是函数的周期性，在使用这两个关系时不要混淆。

【对点训练 4】 若函数 $f(x-2)$ 为奇函数, $f(-2)=0$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-2, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(3-x)>0$ 的解集为 $(5, +\infty)$.

解析: 因为函数 $f(x-2)$ 为奇函数, 所以 $f(x-2)$ 图象的对称中心为点 $(0,0)$. 因为 $f(x)$ 的图象可由 $f(x-2)$ 的图象向左平移 2 个单位长度而得, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称. 因为 $f(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上也单调递减. 因为 $f(3-x)>0=f(-2)$, 所以 $3-x<-2$, 解得 $x>5$.

命题角度 1 函数的单调性、奇偶性的应用

【例 5】 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且为奇函数, 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是(D)

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$
C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

解析: 由函数 $f(x)$ 是奇函数, 可知 $f(-1) = -f(1) = 1$. $-1 \leq f(x-2) \leq 1$, 即 $f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1)$. 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 则有 $-1 \leq x-2 \leq 1$, 解得 $1 \leq x \leq 3$. 故选 D.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/427110063121006111>