· 课件编辑说明 ·

版本要求

本课件需用office2010及以上版本打开，如果您的电脑是office2007及以下版本或者WPS软件，可能会出现不可编辑的文档。

乱码问题

如您在使用过程中遇到公式不显示或者乱码的情况，可能是因为您的电脑缺少字体，请登录网站www.canpointgz.cn/faq 下载。

联系我们

如您还有其他方面的问题，请登录网站www.canpointgz.cn/faq ，点击“常见问题” ，或致电010-58818058。

全品学练考

高中数学

选择性必修第二册 RJA

第四章数列

与子

CONTENTS

4.4*数学归纳法

【学习目标】

1. 了解数学归纳法的原理.

2. 能用数学归纳法证明与正整数n有关的一些简单命题.

课 前 预 习

知识点数学归纳法

一般地，证明一个与 正整数n 有关的命题，可按下列步骤进行：

（1）（归纳奠基）证明当$n=$ $(n_0 \in N)$ 时命题成立；

（2）（归纳递推）以“当$n=k(k\in N^*, k\geq n_0)$时命题成立”为条件，推出“当$n=$ $k+1$ 时命题也成立”.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数n都成立，这种证明方法称为数学归纳法

课 前 预 习

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)与正整数n有关的数学命题只能用数学归纳法证明.(×)

[解析]与正整数n有关的数学命题也可以用其他方法证明.

(2)数学归纳法证明的第一步中n的初始值n_0只能是1.(×)

[解析]数学归纳法证明的第一步中n的初始值n_0应根据命题的具体情况来确定，不一定是1.如用数学归纳法证明凸n边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$时，应取其初始值$n_0=3$.

(3)数学归纳法的两个步骤缺一不可.(√)

[解析]第一步是基础，第二步利用假设进行推理是关键，两个步骤缺一不可.

课 中 探 究

探究点 一 数学归纳法的原理

例1 (1) 用数学归纳法证明$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ ($a\neq 1$, $n\in N$), 要验证当$n=1$时等式成立，其左边的式子应是 （ **B** ）

A.1　　B.$1+a$

C.$1+a+a^2$　　D.$1+a+a^2+a+$

[解析]当$n=1$ 时，左边的式子应是$1+a$.

课 中 探 究

(2) [2023·浙江嘉兴一中高二期中] 用数学归纳法证明"$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1(n\in N)$"时，假设当$n=k(k\in N)$时命题成立，则当$n=k+1$时，不等式的左边应在$n=k$的基础上加上　(D)

A.$\frac{1}{3k+1}$　　B.$\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{k+1}$

C.$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$　　D.$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}$

[解析] 当$n=k(k\in N^*)$时，不等式的左边：为$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}$,当$n=k+1$时,不等式的左边为$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$,则 当$n=k+1$时，不等式的左边应在$n=k$的基础上加上$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}$,故选D.

课 中 探 究

探究点二数学归纳法的应用

角度 一证明和n有关的等式

例2 [2022·广西河池高二期中]用数学归纳法证明：$(1^2+1)+(2^2+2)+\dots+(n^2+n)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$($n$为正整数).

证明：（1）当$n=1$时，左边=2, 右；边$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$，等式成立.

(2) 假设当$n=k$ ($k\in N*$) 时，等式成立,

即$(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(k^2+k)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$,

课 中 探 究

那么当n=k+1 时，

$$(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(k^2+k)+[(k+1)^2+(k+1)]=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)^2+(k+1)=$$

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(1+k+1)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2].$$

即当n=k+1 时，等式也成立.

综上可知，等式对任意正整数n都成立.

课 中 探 究

变式 设关于正整数n的函数f(n)=1×2²+2×32+…+n(n+1)?.

（1）求f(1), f(2), f(3).

解： f(1)=4, f(2)=22, f(3)=70.

(2) 是否存在常数a, b, c, 使得$f(n)=\frac{n(n+1)}{12}\cdot(an^2+bn+c)$对任意n∈N* 恒成立?若存在，用数学归纳法证明你的结论；若不存在，请说明理由.

解： 假设存在a, b, c满足题意，则由题意可得$\begin{cases} a+b+c=24, \\ 4a+2b+c=44, \\ 9a+3b+c=70 \end{cases}$解得$\begin{cases} a=3, \\ b=11, \\ c=10. \end{cases}$

下面用数学归纳法证明$f(n)=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$对任意n ∈N* 恒成立.

①当n=1时，$f(1)=\frac{1\times 2}{12}\times(3+11+10)=4$，等式成立.

②假设当n=k（k∈N）时，等式成立，即$f(k)=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$，则当n=k+1 时，

$f(k+1)=f(k)+(k+1)(k+2)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+$

$(k+1)(k+2)^2=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)=\frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]$,即当

n=k+1 时，等式也成立.综上所述，当a=3, b=11, c=10 时，题设中的等式对任意n∈N

恒成立.

课 中 探 究

［素养小结］

用数学归纳法证明恒等式时，应关注以下三点：

（1）弄清n取第一个值n_0时等式两端项的情况；

(2) 弄清从$n=k$到$n=k+1$时，等式两端增加了哪些项，减少了哪些项；

(3) 证明当$n=k+1$时等式也成立的过程中，要设法将待证式与归纳假设建立联系，并朝要证明的表达式变形.

课中探究

角度二证明不等式问题

例3用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}+n(n\in\mathbf{N}^*)$

证明：(1)当n=1时，左边=1+—, 右边$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$,即当n=1时，不等式成立.

(2)假设当n=k(k∈N")时，不等式成立，即$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\le\frac{1}{2}+k$, 则当n=k+1时,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}<\frac{1}{2}+k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+(k+1)$,即当$n=k+1$时,不等式也成立.

由（1）(2)得，不等式对所有的n∈N*都成立.

课中探究

变式[2022.郑州一中高二期末]设f(n)=nn+1, g(n)=(n+1), n∈N*.

(1)当a=1.23.4时试比较$\frac{f(n)}{g(n)}$与1的大小:

解: f1)=1²=1.g(1)=2¹=2,∴f1)<g(1)<1.

$\because f(2)=2^3=8, g(2)=3^2=9, \therefore f(2)<g(2), \frac{f(2)}{g(2)}<1.$

$\because f(3)=3^4=81, g(3)=4^3=64, \therefore f(3)>g(3), \frac{f(3)}{g(3)}>1.$

$\because f(4)=4^5=1024, g(4)=5^4=625, \therefore f(4)>g(4), \frac{f(4)}{g(4)}>1.$

课 中 探 究

(2)根据(1)的结果猜测一个一般性结论，并加以证明.

解：猜想：当n≥3, n∈N时 ；有$\frac{f(n)}{g(n)}>1$.

证明：①当n=3时，猜想成立.

②假设当a=kke≥3, A∈N)时猜想成立团$\frac{f(k)}{g(k)}=\frac{k^{k+1}}{(k+1)^{k}}>1$

当$n=k+1$时,$\frac{f(k+1)}{g(k+1)}=\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}=\frac{k^{k+1}}{(k+1)^{k}}\cdot\frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}}>\frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}}$.

课 中 探 究

$\because (k+1)^2=k^2+2k+1>k(k+2)>0$,

$\therefore \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}>1$ 则 $\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right]^{k+1}>1$ 即 $\frac{(k+1)^{2k+2}}{[k(k+2)]^{k+1}}>1$.

$\therefore$ 当n=k+1 时，猜想成立.

由①②知，当n≥3, n∈N*时；有 $\frac{f(n)}{g(n)}>1$