湘豫名校联考2023届高三上学期8月入学摸底考试理科数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x\mid |x-1|>1\},N=\{x\mid -2\le x<1\}$，则$\left(\complement_U M\right)\cup N=$（　　）

A．$\{x|-2\leqslant x<0\}$　　B．$\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$

C．$\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$　　D．$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

2．设m,n表示两条不同的直线，α表示平面，且$m//n$，则“$n\perp\alpha$”是“$m\perp\alpha$”成立的（　　）

A．充要条件　　B．必要不充分条件

C．充分不必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知随机变量$\xi\sim N\left(2,\sigma^2\right)$，若$P(2\leqslant\xi<3)=0.3$，则$P(\xi<1)=$（　　）

A．0.6　　B．0.5　　C．0.3　　D．0.2

4．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\sin x+a$，若$f\left(\ln m\right)=1,f\left(\ln\frac{1}{m}\right)=3$，则$a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．-1　　D．-2

5．定义函数$f\left(x,n\right)=(1+x)^n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，已知$f\left(\mathrm{i},n\right)=32\mathrm{i}$(i为虚数单位)，则$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$的展开式中常数项是（　　）

A．180　　B．120　　C．90　　D．45

6．已知函数$f\left(x\right)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，则不等式$f\left(2x-1\right)<f\left(1-x\right)$的解集为（　　）

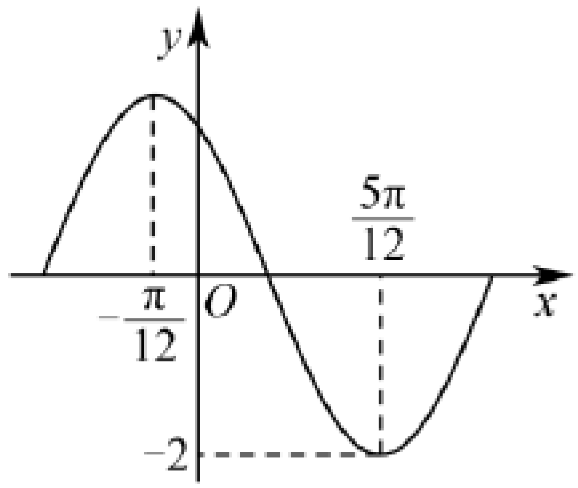
A．$\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{2}{3},1\right)$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

7．已知数列$\left\{a_n\right\}$是递增的等差数列，a_3是a_1与a_{11}的等比中项，且$a_2=5$.若$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，则数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和$S_n=$（　　）

A．$\frac{n}{6n+4}$　　B．$\frac{n}{6n+6}$　　C．$\frac{n}{3n+2}$　　D．$\frac{n}{3n+3}$

8．将函数$y=\sin x$的图象上所有点的横坐标变为原来的$m(m>0)$倍，纵坐标不变，再将所得函数图象向左平移$\varphi(0<\varphi<\pi)$个单位长度，最后将所得函数图象上所有点的纵坐标变为原来的$n(n>0)$倍，横坐标不变，得到如图所示的函数$f\left(x\right)$的部分图象，则

m,n,φ 的值分别为（　　）



A．$m=2,n=2,\varphi=\frac{2\pi}{3}$

B．$m=\frac{1}{2},n=2,\varphi=\frac{2\pi}{3}$

C．$m=2,n=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

D．$m=\frac{1}{2},n=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

9．某小区共有 3 个核酸检测点同时进行检测，有 6 名志愿者被分配到这 3 个检测点参加服务，6 人中有 4 名“熟手”和 2 名“生手”，1 名“生手”至少需要 1 名“熟手”进行检测工作的传授，每个检测点至少需要 1 名“熟手”，且 2 名“生手”不能分配到同一个检测点，则不同的分配方案种数是（　　）

A．72　　B．108　　C．216　　D．432

10．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)-f(x)>0$.给出下列不等式：① $f(2)>\mathrm{e}\cdot f(1)$；② $2f(1)>\mathrm{e}\cdot f(\ln 2)$；③ $f(1)>2\mathrm{e}\cdot f(\ln\sqrt{2})$，其中不等式恒成立的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

11．已知三棱锥 $D-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上，底面 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且其所在圆 O_1 的面积为 6π .若三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $9\sqrt{3}$，则球 O 的体积为（　　）

A．$\frac{256}{3}\pi$　　B．$\frac{343}{6}\pi$　　C．256π　　D．$\frac{343}{2}\pi$

12．设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 作斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 M,N 两点，且 $(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N})\cdot\overrightarrow{MN}=0$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

二、填空题

13．已知向量$\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(\lambda,2)(\lambda\in R)$.若$\vec{a}//\vec{b}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$__________.

14．过抛物线$y^2=4x$的焦点作一条直线交抛物线于A,B两点，若线段AB的中点M的横坐标为2，则$|AB|$等于________.

15．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，且$a_3=2S_2+1,a_4=2S_3+1$.数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_3 a_n$，若存在常数k，使不等式$k\geqslant\dfrac{b_n+1}{(n+9)(b_n+2)}(n\in N^*)$恒成立，则$k$的最小值为__________.

16．已知不等式$e^x+a\ln x\geq x^a+x$对任意$x\in(1,+\infty)$恒成立，则正实数a的取值范围是__________.

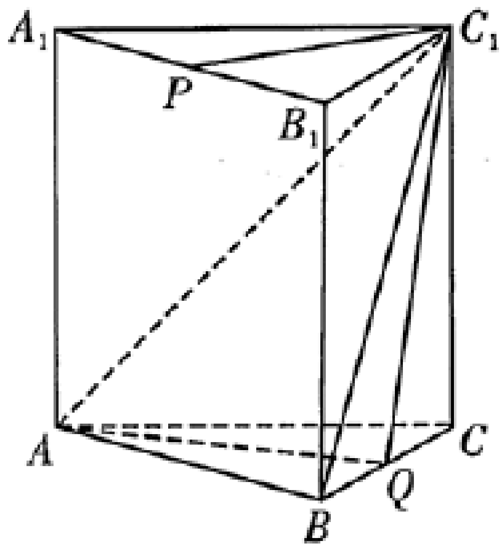
三、解答题

17．已知函数$f(x)=3+2\sqrt{3}\sin x\cos x-6\cos^2 x$.

(1)若$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$，求函数$f(x)$的值域；

(2)已知a,b,c分别为锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边，$f(B)=3$，且$b=\sqrt{7},a+c=5$，求$\triangle ABC$的面积.

18．在如图所示的直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$为正三角形，且$AB=AA_1=2$，点P,Q分别为A_1B_1,BC的中点.



(1)求直线PC_1与平面AQC_1所成角的正弦值；

(2)求二面角$B-AC_1-Q$的余弦值.

19．某商超通过产品、价格、渠道和促销等各种营销策略，销售业绩得到不断提升，商超利润也有较大的攀升，经统计，该商超近7周的利润数据如下：

第x周	1	2	3	4	5	6	7
商超利润y（单位：万元）	32	35	36	45	47	51	55

(1)若y关于x具有较强的线性相关关系，求y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测该商超下周的利润；

(2)该商超为提升业绩，决定对客户开展抽奖促销活动：单张小票不超过500元可参加抽奖一次；单张小票超过500元可参加抽奖两次.若抽中“一等奖”，可获得30元的代金券；抽中“二等奖”，可获得20元的代金券；抽中“谢谢参与”，则没有奖励.已知本次抽奖活动中获得“一等奖”的概率为$\frac{1}{4}$，获得二等奖”的概率为$\frac{1}{2}$.某客户有两次参与抽奖活动的机会，假设两次抽奖之间是否中奖相互独立，求该客户所获得代金券总额X（元）的分布列及数学期望.

附：$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}x_i^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；参考数据：

$\sum\limits_{i=1}y_i=301,\sum\limits_{i=1}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=112$

20．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{1}{3}$，以原点为圆心、椭圆短半轴长为半径的圆与直线$x-y-4=0$相切.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过点F_2作直线l交椭圆C于M,N两点（直线l与x轴不重合）.在x轴上是否存在点P，使得直线PM与PN的斜率之积为定值？若存在，求出所有满足条件的点P的坐标；若不存在，请说明理由.

21．已知函数$f\left(x\right)=x\ln x+1$.

(1)若函数$f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$上单调递增，求实数a的取值范围；

(2)证明：$f\left(x\right)\geq x^2\mathrm{e}^{1-x}$.

22．在平面直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），直线$l$过点$A\left(-1,0\right)$，倾斜角为$\frac{3}{4}\pi$，以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线C的普通方程和直线l的极坐标方程；

(2)设直线l与y轴交于点B，点P为曲线C上的动点，当$\angle PAB$最大时，求$\triangle PAB$的面积.

23．已知函数$f\left(x\right)=\left|x+1\right|-\left|x-5\right|$.

(1)求不等式$f\left(x\right)>3$的解集；

(2)若$f(x)_{\max}=m$，且正数a,b满足$a+b=m$，证明：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{9}$.

参考答案：

1．C

【解析】

【分析】

由补集、并集的定义结合绝对值不等式的解法运算即可．

【详解】

因为集合$M=\{x \mid |x-1|>1\}$，所以$\complement_U M=\{x \mid |x-1|\leqslant 1\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,

又因为$N=\{x|-2\leqslant x<1\}$，所以$\left(\complement_U M\right)\cup N=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$.

故选：C.

2．A

【解析】

【分析】

根据充分、必要条件以及线面垂直的知识确定正确答案.

【详解】

若两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于该平面.

所以由“$n\perp\alpha$”可得“$m\perp\alpha$”，充分性成立；

反之亦成立.所以“$n\perp\alpha$”是“$m\perp\alpha$”成立的充要条件.

故选：A

3．D

【解析】

【分析】

由正态分布的对称性求出$P(1\leqslant\xi<2)=0.3$即得解.

【详解】

解：由随机变量$\xi\sim N\left(2,\sigma^2\right)$及正态分布的对称性，知$P(1\leqslant\xi<2)=P(2\leqslant\xi<3)=0.3$，

所以$P(\xi<1)=0.5-P(1\leqslant\xi<2)=0.2$.

故选：D.

4．B

【解析】

【分析】

由利用函数性质计算 $f(x)+f(-x)$，然后由已知计算 $f(\ln m)+f(-\ln m)$ 从而可求得 a 值.

【详解】

由函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+\sin x+a$，可得 $f(-x)+f(x)=2a$.

因为 $f\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=f(-\ln m)=3, f(\ln m)=1$，所以 $f(\ln m)+f\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=1+3=4=2a$.

所以 $a=2$.

故选：B.

5．A

【解析】

【分析】

根据复数运算求得 n，结合二项式展开式的通项公式求得正确答案.

【详解】

$(1+\mathrm{i})^{2}=2\mathrm{i},(1+\mathrm{i})^{4}=(2\mathrm{i})^{2}=-4,(1+\mathrm{i})^{8}=16,(1+\mathrm{i})^{10}=32\mathrm{i}$，

由题可知 $(1+\mathrm{i})^{n}=32\mathrm{i}$，所以 $n=10$.

所以 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^{2}}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{10}^{r}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-r}\cdot\left(-2x^{-2}\right)^{r}=\mathrm{C}_{10}^{r}(-2)^{r}x^{\frac{10-5r}{2}}$.

令 $\dfrac{10-5r}{2}=0$，解得 $r=2$.所以展开式中的常数项是 $\mathrm{C}_{10}^{2}\times(-2)^{2}=180$.

故选：A

6．B

【解析】

【分析】

利用导数说明函数的单调性，再根据函数的单调性及定义域将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可.

【详解】

解：由题意可知，函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^{2}}-1=-\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{2}\leq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

则由$f\left(2x-1\right)<f\left(1-x\right)$可得$\begin{cases}2x-1>0\\1-x>0\\2x-1>1-x\end{cases}$，解得$\frac{2}{3}<x<1$，即原不等式的解集为$\left(\frac{2}{3},1\right)$.

故选：B.

7．A

【解析】

【分析】

根据已知条件求得数列$\{a_n\}$的首项和公差，从而求得a_n，利用裂项求和法求得S_n.

【详解】

因为数列$\{a_n\}$是递增的等差数列，所以数列$\{a_n\}$的公差$d>0$.

由题意得$\begin{cases}a_1+d=5\\\left(a_1+2d\right)^2=a_1\left(a_1+10d\right)\end{cases}$,

解得$a_1=2,d=3$或$a_1=5,d=0$（舍去）.

所以$a_n=2+3\left(n-1\right)=3n-1$.

所以$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{\left(3n-1\right)\left(3n+2\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$.

所以$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{6n+4}$.

故选：A

8．D

【解析】

【分析】

由图象求得$f(x)$的表达式，然后由图象变换得结论.

【详解】

设$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\alpha\right)(A>0,\omega>0,|\alpha|<\pi)$，由函数图象，知$A=2,\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$，

所以$T=\pi,\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\alpha\right)$.

又函数图象过点$\left(\frac{5\pi}{12},-2\right)$，所以$2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)=-2$.

所以$\frac{5\pi}{6}+\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$\alpha=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

因为$|\alpha|<\pi$，所以$\alpha=\frac{2\pi}{3}$.所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.所以

$m=\frac{1}{2},n=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$.

故选：D.

9．C

【解析】

【分析】

先把 4 名“熟手”分为人数为2,1,1的三组，再分到三个检测点，然后把 2 名“生手”分配到 3 个检测点中的 2 个，由乘法原理计算可得.

【详解】

根据题意，可先把 4 名“熟手”分为人数为2,1,1的三组，再分配到 3 个检测点，共有

$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$种分法，然后把 2 名“生手”分配到 3 个检测点中的 2 个，有A_3^2种分法，所以共

有$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3\cdot A_3^2=216$种不同的分配方案.

故选：C.

10．C

【解析】

【分析】

构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，利用导数确定单调性，然后由$g(x)$的单调性判断各个不等式是否成立.

【详解】

令$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

因为$f'(x)-f(x)>0$，所以$g'(x)>0$，函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

对于□，因为$g(2)>g(1)$，即$\frac{f(2)}{e^2}>\frac{f(1)}{e^1}$，整理得$f(2)>e\cdot f(1)$，□恒成立；

对于□，因为$1>\ln2$，所以$g(1)>g(\ln2)$，即$\frac{f(1)}{e^1}>\frac{f(\ln2)}{e^{\ln2}}=\frac{f(\ln2)}{2}$，整理得

$2f(1)>e\cdot f(\ln2)$，□恒成立；

对于□，因为$1>\ln\sqrt{2}$，所以$g(1)>g(\ln\sqrt{2})$，即$\frac{f(1)}{e^1}>\frac{f(\ln\sqrt{2})}{e^{\ln\sqrt{2}}}=\frac{f(\ln\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$，整理得$\sqrt{2}f(1)>e\cdot f(\ln\sqrt{2})$，□错误.所以恒成立的不等式有□和□，共2个.

故选：C.

11．B

【解析】

【分析】

求出圆O_1的半径得$\triangle ABC$边长，从而得三角形面积，确定三棱锥体积最大时D点位置，得三棱锥的高，从而求得球半径得球体积.

【详解】

如图，$\triangle ABC$所在圆O_1即为$\triangle ABC$的外接圆.

设圆O_1的半径为r，则$\pi r^2=6\pi$，解得$r=\sqrt{6}$.

因为$\triangle ABC$为等边三角形，所以$A=B=C=60^\circ, AB=BC=AC$.

由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin 60^\circ}=2r$，解得$AB=3\sqrt{2}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

如图，当O_1, O, D三点共线时，三棱锥$D-ABC$的体积最大，最大值为$9\sqrt{3}$，此时$DO_1\perp$平面ABC，三棱锥的高h最大，且有$\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times h=9\sqrt{3}$，解得$h=6$.

设球O的半径为R，在$\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$中，$(6-R)^2+r^2=R^2$，解得$R=\frac{7}{2}$.

所以球O的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\left(\frac{7}{2}\right)^3\pi=\frac{343}{6}\pi$.

故选：B.