上海市洋泾中学 2023-2024 学年高三 5 月第二次月考试题（数学试题文）

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．$\dfrac{2+i}{1-i}=$（　　）

A．$\dfrac{1+3i}{2}$　　B．$\dfrac{3+i}{2}$　　C．$\dfrac{3-i}{2}$　　D．$\dfrac{-1+3i}{2}$

2．设 $f(x)=\begin{cases}x-2,(x\geq 10)\\ f[f(x+6)],(x<10)\end{cases}$,则 $f(5)=$( )

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

3．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $a_2=-5$，$S_4=-16$，则 $a_6=$（　　）

A．5　　B．3　　C．－12　　D．－13

4．已知 F_1,F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，过 F_1 的直线与双曲线的两支分别交于 A,B 两点（*A* 在右支，*B* 在左支）若 ΔABF_2 为等边三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{7}$

5．已知复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$（i 为虚数单位），则 z 的虚部为（　　）

A．$-i$　　B．i　　C．1　　D．-1

6．双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程是（ ）

A．x±2y=0　　B．2x±y=0　　C．4x±y=0　　D．x±4y=0

7．设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

8．已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，则与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为(　　)

A．$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

9．设 $f(x)$ 、$g(x)$ 分别是定义在 **R** 上的奇函数和偶函数，且 $f(x)+g(x)=(x+1)^2-2^{x+1}$，则 $f(1)-g(1)=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3

10．已知$\triangle ABC$ 的垂心为 H，且 $AB=6, BC=8, M$ 是 AC 的中点，则 $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 10　　D. 8

11．下列说法正确的是（　　）

A. 命题“$\exists x_0\le 0$，$2x_0\le\sin x_0$”的否定形式是“$\forall x>0$，$2x>\sin x$”

B. 若平面 α，β，γ，满足 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$ 则 $\alpha//\beta$

C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(1,\sigma^2\right)$（$\sigma>0$），若 $P(0<\xi<1)=0.4$，则 $P(\xi>0)=0.8$

D. 设 x 是实数，“$x<0$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分不必要条件

12．以下关于 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$ 的命题，正确的是

A. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 需是函数 $y=f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴

C. 点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心

D. 将函数 $y=f\left(x\right)$ 图象向左平移需 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，可得到 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $(x-2)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64，则展开式各项系数和为__________.

14．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交椭圆 C 于 A，B 两点，若 $\angle ABF_2=90°$，且$\triangle ABF_2$ 的三边长 $\left|BF_2\right|$，$\left|AB\right|$，$\left|AF_2\right|$ 成等差数列，则 C 的离心率为__________.

15．有以下四个命题：①在 ΔABC 中，$A>B$ 的充要条件是 $\sin A>\sin B$；②函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上存在零点的充要条件是 $f(1)\cdot f(2)<0$；③对于函数 $y=f(x)$，若 $f(2)=f(-2)$，则 $f(x)$ 必不是奇函数；④函数 $y=f(1-x)$ 与 $y=f(1+x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.其中正确命题的序号为______.

16．函数 $y=\cos(2x+\phi)(-\pi\le\phi\le\pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后，与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合，则 $\phi=$_____.

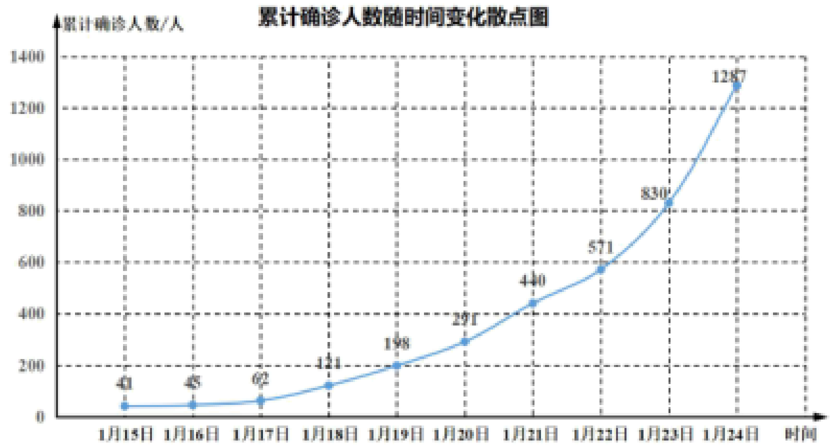
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=\frac{n+1}{2}a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n\le(n+1)\lambda$ 成立，求实数 λ 的最小值

18.（12 分）**2019 年 12 月以来，湖北省武汉市持续开展流感及相关疾病监测，发现多起病毒性肺炎病例，均诊断为病毒性肺炎/肺部感染，后被命名为新型冠状病毒肺炎（*CoronaVirusDisease*2019，*COVID*—19），简称"新冠肺炎".下图是 2020 年 1 月 15 日至 1 月 24 日累计确诊人数随时间变化的散点图.**



为了预测在未采取强力措施下，后期的累计确诊人数，建立了累计确诊人数 y 与时间变量 t 的两个回归模型，根据 1 月 15 日至 1 月 24 日的数据（时间变量 t 的值依次 1，2，…，10）建立模型 $\hat{y}=c+dt$ 和 $\hat{y}=a+b\cdot1.5^t$.

（1）根据散点图判断，$\hat{y}=c+dt$ 与 $\hat{y}=a+b\cdot1.5^t$ 哪一个适宜作为累计确诊人数 y 与时间变量 t 的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

（2 根据（1）的判断结果及附表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（3）以下是 1 月 25 日至 1 月 29 日累计确诊人数的真实数据，根据（2）的结果回答下列问题：

时间	1 月 25 日	1 月 26 日	1 月 27 日	1 月 28 日	1 月 29 日
累计确诊人数的真实数据	1975	2744	4515	5974	7111

（ⅰ）当 1 月 25 日至 1 月 27 日这 3 天的误差（模型预测数据与真实数据差值的绝对值与真实数据的比值）都小于 0.1 则认为模型可靠，请判断（2）的回归方程是否可靠？

（ⅱ）**2020 年 1 月 24 日在人民政府的强力领导下，全国人民共同采取了强力的预防“新冠肺炎”的措施，若采取措施 5 天后，真实数据明显低于预测数据，则认为防护措施有效，请判断预防措施是否有效？**

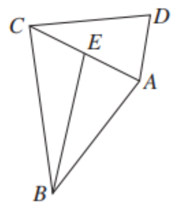
附：对于一组数据（(u_1,v_1)，(u_2,v_2)，……，(u_n,v_n)，其回归直线 $v=a+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2}，\quad \hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}.$$

参考数据：其中 $\omega_i=1.5^{t_i}$，$\bar{\omega}=\frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}\omega_i$.

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\bar{\omega}$	$\sum\limits_{i=1}^{10}t_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{10}\omega_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{10}\omega_iy_i$	1.5^{11}	1.5^{12}	1.5^{13}	1.5^{14}	1.5^{15}
5.5	**390**	**19**	**385**	**7640**	**31525**	**154700**	**100**	**150**	**225**	**338**	**507**

19.（12 分）如图在四边形 $ABCD$ 中，$BA=\sqrt{3}$，$BC=2$，E 为 AC 中点，$BE=\frac{\sqrt{13}}{2}$.



（1）求 AC；

（2）若 $D=\frac{\pi}{3}$，求 ΔACD 面积的最大值.

20.（12 分）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=na_n+n$，$n\in\mathbf{N}_+$，$a_2=2$，

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求其通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n\sqrt{a_{n+1}}+a_{n+1}\sqrt{a_n}}$，求证：$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<1$.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=16-|2x-1|$.

（1）解不等式 $f(x)\le|x+2|$；

（2）若函数 $y=f(x)-a$ 存在零点，求 a 的求值范围.

22．（10 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^3-x^2-\left(a-16\right)x$， $g\left(x\right)=a\ln x$， $a\in R$.函数 $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}-g\left(x\right)$ 的导函数 $h'(x)$

在$\left[\frac{5}{2},4\right]$上存在零点.

(1)求实数a的取值范围；

(2)若存在实数a，当$x\in[0,b]$时，函数$f(x)$在$x=0$时取得最大值，求正实数b的最大值；

(3)若直线l与曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$都相切，且l在y轴上的截距为-12，求实数a的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

【解析】

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

$$\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+3i+i^2}{2}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

本题正确选项：A

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，是基础的计算题.

2、**B**

【解析】

根据题中给出的分段函数，只要将问题转化为求 $x\geq 10$ 内的函数值，代入即可求出其值.

【详解】

$\because f(x)=\begin{cases}x-2(x\geq 10)\\ f[f(x+6)](x<10)\end{cases}$，

$\therefore f(5)=f[f(1)]$

$=f(9)=f[f(15)]$

$=f(13)=1$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了分段函数中求函数的值，属于基础题.

3、B

【解析】

由题得 $a_1+d=-5$，$4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=-16$，解得 $a_1=-7$，$d=2$，计算可得 a_6.

【详解】

Q $a_2=-5$，$S_4=-16$，$\therefore a_1+d=-5$，$4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=-16$，解得 $a_1=-7$，$d=2$，

$\therefore a_6=a_1+5d=3$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，前 n 项和公式，考查了学生运算求解能力.

4、D

【解析】

根据双曲线的定义可得 ΔABF_2 的边长为 $4a$，然后在 ΔAF_1F_2 中应用余弦定理得 a,c 的等式，从而求得离心率.

【详解】

由题意 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，$|BF_2|-|BF_1|=2a$，又 $|AF_2|=|BF_2|=|AB|$，

$\therefore |AF_1|-|BF_1|=|AB|=4a$，$\therefore |BF_1|=2a$，

在 ΔAF_1F_2 中 $|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1||AF_2|\cos 60^\circ$，

即 $4c^2=(6a)^2+(4a)^2-2\times 6a\times 4a\times\frac{1}{2}=28a^2$，$\therefore$.

故选：D.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，解题关键是应用双曲线的定义把 A 到两焦点距离用 a 表示，然后用余弦定理建立关系式.

5、D

【解析】

根据复数 z 满足 $z\left(1+i\right)=1-i$，利用复数的除法求得 z，再根据复数的概念求解.

【详解】

因为复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$，

所以 $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$，

所以 z 的虚部为 -1.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查复数的概念及运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

6、A

【解析】

试题分析：渐近线方程是$\frac{x^2}{4}-$ y^2=1，整理后就得到双曲线的渐近线.

解：双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

其渐近线方程是$\frac{x^2}{4}-$ y^2=1

整理得 x±2y=1.

故选 A.

点评：本题考查了双曲线的渐进方程，把双曲线的标准方程中的"1"转化成"1"即可求出渐进方程．属于基础题.

7、C

【解析】

分析：利用复数的除法运算法则：分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简复数 z，然后求解复数的模.

详解：$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+2\mathrm{i}$

$=-\mathrm{i}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$，

则 $|z|=1$，故选 c.

点睛：复数是高考中的必考知识，主要考查复数的概念及复数的运算．要注意对实部、虚部的理解，掌握纯虚数、共轭复数这些重要概念，复数的运算主要考查除法运算，通过分母实数化转化为复数的乘法，运算时特别要注意多项式相乘后的化简，防止简单问题出错，造成不必要的失分.

8、D

【解析】

根据题意得，$2\vec{a}-\vec{b}=(1,-\sqrt{3})$ 设与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 共线的单位向量为 (x,y)，利用向量共线和单位向量模为 1，列式求出 x,y 即可得出答案.

【详解】

因为$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，则$2\vec{a}=(2,0)$，

所以$2\vec{a}-\vec{b}=(1,-\sqrt{3})$，

设与$2\vec{a}-\vec{b}$共线的单位向量为(x,y)，

则$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

所以与$2\vec{a}-\vec{b}$共线的单位向量为$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算以及共线定理和单位向量的定义.

9、C

【解析】

先根据奇偶性，求出$f(x)-g(x)$的解析式，令$x=1$，即可求出。

【详解】

因为$f(x)$、$g(x)$分别是定义在R上的奇函数和偶函数，$f(x)+g(x)=(x+1)^2-2^{x+1}$，用$-x$替换$x$，得

$f(-x)+g(-x)=(-x+1)^2-2^{-x+1}$，

化简得$-f(x)+g(x)=(x-1)^2-2^{-x+1}$，即$f(x)-g(x)=2^{-x+1}-(x-1)^2$

令$x=1$，所以$f(1)-g(1)=2^0-0=1$，故选C。

【点睛】

本题主要考查函数性质奇偶性的应用。

10、A

【解析】

由垂心的性质，得到$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，可转化$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}$，又$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$即得解.

【详解】

因为H为$\triangle ABC$的垂心，所以$BH\perp AC$，

所以$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，而$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BM}$，

所以$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BM})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}$，

因为M是AC的中点，

所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}^2)=\frac{1}{2}(64-36)=14$.

故选：A

【点睛】

本题考查了利用向量的线性运算和向量的数量积的运算率，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

11、D

【解析】

由特称命题的否定是全称命题可判断选项 **A**；α,β可能相交，可判断 **B** 选项；利用正态分布的性质可判断选项 **C**；$\frac{1}{x}<1\Rightarrow x<0$或$x>1$，利用集合间的包含关系可判断选项 **D.**

【详解】

命题“$\exists x_0\le 0$，$2x_0\le\sin x_0$”的否定形式是“$\forall x\le 0$，$2x>\sin x$”，故 **A** 错误；$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则α,β可能相交，故 **B** 错误；若$P(0<\xi<1)=0.4$，则$P(1<\xi<2)=0.4$，所以$P(\xi<0)=\frac{1-0.4-0.4}{2}=0.1$，故$P(\xi>0)=0.9$，所以 **C** 错误；由$\frac{1}{x}<1$，得$x<0$或$x>1$，故“$x<0$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分不必要条件，**D** 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查命题的真假判断，涉及到特称命题的否定、面面相关的命题、正态分布、充分条件与必要条件等，是一道容易题.

12、D