

沈阳二中 2023—2024 学年度下学期 4 月阶段测试

高一（26 届）数学试题

命题人：高一数学组 审校人：高一数学组

说明：1. 考试时长 120 分钟，满分 150 分.

2. 考生务必将答案答在答题卡相应位置上，在试卷上作答无效.

第 I 卷（选择题 共 58 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A = \left\{ x \mid -\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $C = A \cap B$, 则集合 C 中

的元素个数为 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2. 已知平面向量 $\vec{a} = (10 \sin \theta, 1)$, $\vec{b} = (\cos \theta, 3)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan \theta =$ ()

A. $-\frac{1}{3}$ 或 -3 B. $\frac{1}{3}$ 或 -3
C. $\frac{1}{3}$ 或 3 D. $-\frac{1}{3}$ 或 3

3. $\sqrt{3} \tan 85^\circ \tan 35^\circ - \tan 85^\circ - \tan 35^\circ =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

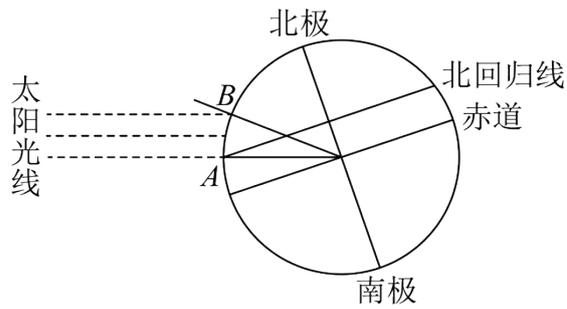
4. 古希腊地理学家埃拉托色尼从书中得知，位于尼罗河第一瀑布的塞伊尼（现在的阿斯旺，

在北回归线上）记为 A ，夏至那天正午，阳光直射，立杆无影；同样在夏至那天，他所在

的城市——埃及北部的亚历山大城记为 B ，测得立杆与太阳光线所成的角约为 7.2° . 他又派

人测得 A , B 两地的距离 $AB = 800$ km, 平面示意图如图，则可估算地球的半径约为 ()

($\pi \approx 3.14$)



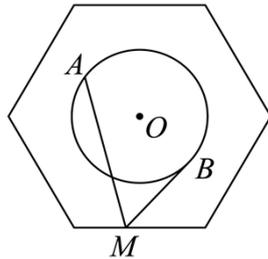
- A. 7260 km B. 6870 km C. 6369 km D. 5669

km

5. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为单位向量，且满足 $3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ ，则 $\cos\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 如图，正六边形的边长为 $2\sqrt{2}$ ，半径为 1 的圆 O 的圆心为正六边形的中心，若点 M 在正六边形的边上运动，动点 A, B 在圆 O 上运动且关于圆心 O 对称，则 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的取值范围为 ()



- A. $[4, 5]$ B. $[5, 7]$ C. $[4, 6]$ D. $[5, 8]$

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 2\sqrt{7}$ ， O 是 $\triangle ABC$ 的外心， M 为 BC 的中点， $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = 8$ ， N 是直线 OM 上异于 M, O 的任意一点，则 $\vec{AN} \cdot \vec{BC} =$ ()

- A. 3 B. 6 C. 7 D. 9

8. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$)，若对于任意实数 φ ，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上至少有 2 个零点，至多有 3 个零点，则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$

B. $\left[1, \frac{4}{3}\right)$

C. $\left[1, \frac{5}{3}\right)$

D.

$\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 4, CA = CB = 8$ ，若 H, W, G, I 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心、重心和内心，则下列四种说法正确的有（ ）

A. $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

B. $\vec{AW} \cdot \vec{BC} = 24$

C. $\vec{AG} \cdot \vec{BC} = 16$

D. $\vec{AI} \cdot \vec{BC} = 12$

10. 下列说法中正确的有（ ）

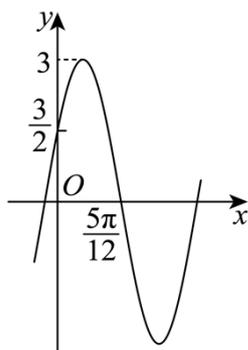
A. 与 $\vec{r} = (2, -1)$ 垂直的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$

B. 已知 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{b}$ 且 $|\vec{b}| = 5$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{25}{2}$

C. 若非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 \vec{a} 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角是 30°

D. 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, 1)$ ，且 \vec{a} 与 $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 夹角为锐角，则 λ 的取值范围是 $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

11. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则（ ）



A. $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

- B. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度后得到的新函数是奇函数
- C. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{4\pi}{3}, 0)$ 对称
- D. 若方程 $f(x) = \frac{3}{2}$ 在 $(0, m)$ 上有且只有 6 个根, 则 $m \in (3\pi, \frac{10\pi}{3}]$

第 II 卷 (非选择题 共 92 分)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知平面单位向量 \vec{e}_1, \vec{e}_2 , 满足 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = \sqrt{2}$, 设 $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta =$ _____.

13. 求值 $\frac{\cos 10^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) - 2 \sin 50^\circ}{\sin 5^\circ} =$ _____.

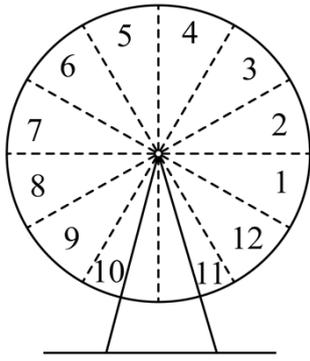
14. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 C , 值域为 D , 若存在整数 $m \in C$, $n \in D$, 且 $n = f(m)$, 则 mn 为函数 $y = f(x)$ 的“子母数”. 已知集合

$$A = \left\{ x \mid \sin \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} \tan \frac{x}{24} + \frac{\pi}{3} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-8\pi, 8\pi] \right\}, \text{ 函数 } g(x) = [\cos x], x \in A \quad ([x]$$

表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[1.2] = 1$), 当 $xg(x) < 0$ 时, 函数 $y = g(x)$ 的所有“子母数”之和为 _____.

四、解答题

15. 某游乐场的摩天轮示意图如图, 已知该摩天轮的半径为 30 米, 轮上最低点与地面的距离为 2 米, 沿逆时针方向匀速旋转, 旋转一周所需时间为 $T = 24$ 分钟. 在圆周上均匀分布 12 个座舱, 标号分别为 1~12 (可视为点), 在旋转过程中, 座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系基本符合正弦函数模型, 现从图示位置, 即 1 号座舱位于圆周最右端时开始计时, 旋转时间为 t 分钟.



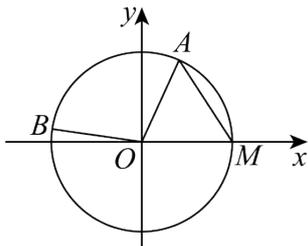
(1) 求 1 号座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系 $h(t)$ 的解析式;

(2) 在前 24 分钟内, 求 1 号座舱与地面的距离为 17 米时 t 的值;

16. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 顶点在坐标原点, 以 x 轴非负半轴为始边的锐角 α

与钝角 β 的终边与单位圆 O 分别交于 A, B 两点, x 轴的非负半轴与单位圆 O 交于点 M ,

已知 $S_{\triangle OAM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 点 B 的横坐标是 $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.



(1) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值;

(2) 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

17. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$).

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求函数 $g(x) = \lg \left[f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \right]$ 的定义域;

(2) 若 $f(x)$ 过点 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$, 设 $h(x) = \cos^2 x + 2a \sin x$, 若对任意的 $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 都有 $h(x_1) < f(x_2) + 3$, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知向量 $\vec{m} = (\sin x, \sin x + \cos x)$, $\vec{n} = (\cos x, -2)$, 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时, 方程 $2f(x) - m + 1 = 0$ 有解, 求实数 m 的取值范围;

(3) 是否存在正实数 a , 使不等式 $|m+n|^2 - 4af(x) - 10 \geq 0$ 对所有 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 恒成立?

若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

19. 已知 O 为坐标原点, 对于函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$, 称向量 $\overrightarrow{OM} = (a, b)$ 为函数 $f(x)$ 的相伴特征向量, 同时称函数 $f(x)$ 为向量 \overrightarrow{OM} 的相伴函数.

(1) 记向量 $\overrightarrow{ON} = (1, \sqrt{3})$ 的相伴函数为 $f(x)$, 若当 $f(x) = \frac{8}{5}$ 且 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, 求

$\sin x$ 的值;

(2) 设 $g(x) = \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) (x \in \mathbf{R})$, 试求函数 $g(x)$ 的相伴特征向量

\overrightarrow{OM} , 并求出与 \overrightarrow{OM} 共线的单位向量;

(3) 已知 $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$, $\overrightarrow{OT} = (-\sqrt{3}, 1)$ 为函数 $h(x) = m \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) (m \in \mathbf{R})$ 的

相伴特征向量, $\varphi(x) = h\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$, 请问在 $y = \varphi(x)$ 的图象上是否存在一点 P , 使得

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$? 若存在, 求出 P 点的坐标; 若不存在, 说明理由.

沈阳二中 2023—2024 学年度下学期 4 月阶段测试

高一（26 届）数学试题

命题人：高一数学组 审校人：高一数学组

说明：1. 考试时长 120 分钟，满分 150 分.

2. 考生务必将答案答在答题卡相应位置上，在试卷上作答无效.

第 I 卷（选择题 共 58 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A = \left\{ x \mid -\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $C = A \cap B$, 则集合 C 中

的元素个数为 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式 $-\frac{3\pi}{2} \leq k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得出整数 k 的取值, 即可得解.

【详解】解不等式 $-\frac{3\pi}{2} \leq k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 可得 $-2 \leq k < 1$,

所以, 整数 k 的取值有 $-2, -1, 0$,

又因为集合 $A = \left\{ x \mid -\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

则 $C = A \cap B = \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$, 即集合 C 中的元素个数为 3.

故选: B.

2. 已知平面向量 $\vec{a} = (10 \sin \theta, 1)$, $\vec{b} = (\cos \theta, 3)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan \theta = ()$

A. $-\frac{1}{3}$ 或 -3

B. $\frac{1}{3}$ 或 -3

C. $\frac{1}{3}$ 或 3

D. $-\frac{1}{3}$ 或 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标表示得到 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{10}$ ，再进行弦化切即可得到 $\tan \theta$ 。

【详解】 $\vec{a} = (10 \sin \theta, 1), \vec{b} = (\cos \theta, 3)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \sin \theta \cos \theta + 3 = 0, \text{ 即 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{10},$$

$$\therefore \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = -\frac{3}{10}, \text{ 即 } -\frac{3}{10} = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}, \therefore 3 \tan^2 \theta + 10 \tan \theta + 3 = 0,$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{1}{3} \text{ 或 } -3.$$

故选：A.

3. $\sqrt{3} \tan 85^\circ \tan 35^\circ - \tan 85^\circ - \tan 35^\circ = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正切和角公式得到 $\frac{\tan 85^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 85^\circ \tan 35^\circ} = -\sqrt{3}$ ，整理后得到答案.

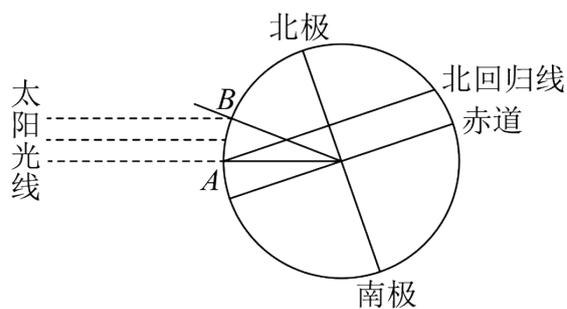
【详解】 $\tan 120^\circ = \tan(85^\circ + 35^\circ) = \frac{\tan 85^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 85^\circ \tan 35^\circ} = -\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \tan 85^\circ + \tan 35^\circ = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \tan 85^\circ \tan 35^\circ,$$

$$\therefore \sqrt{3} \tan 85^\circ \tan 35^\circ - \tan 85^\circ - \tan 35^\circ = \sqrt{3}.$$

故选：C

4. 古希腊地理学家埃拉托色尼从书中得知，位于尼罗河第一瀑布的塞伊尼（现在的阿斯旺，在北回归线上）记为A，夏至那天正午，阳光直射，立杆无影；同样在夏至那天，他所在的城市——埃及北部的亚历山大城记为B，测得立杆与太阳光线所成的角约为 7.2° 。他又派人测得A，B两地的距离 $AB = 800$ km，平面示意图如图，则可估算地球的半径约为（ $\pi \approx 3.14$ ）



- A. 7260 km B. 6870 km C. 6369 km D. 5669

km

【答案】C

【解析】

【分析】利用圆的性质及周长公式即可求解.

【详解】设地心为 O ，依题意可得， $\angle AOB = 7.2^\circ$ ， $\overset{\frown}{AB} = 800$ ，

设地球的周长为 C ，半径为 R ，

$$\text{则 } \frac{7.2}{360} = \frac{800}{C} = \frac{800}{2\pi R}, \text{ 所以 } R = \frac{800 \times 360}{2\pi \times 7.2} \approx 6369 \text{ km.}$$

故选：C

5. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为单位向量，且满足 $3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ ，则 $\cos \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ ，得 $3\vec{a} + 4\vec{b} = -5\vec{c}$ ，两边平方求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ， $\vec{c} = -\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$ ，

分别求出 $|\vec{a} - \vec{b}|, (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ，再根据向量夹角得计算公式即可得解.

【详解】由 $3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ ，得 $3\vec{a} + 4\vec{b} = -5\vec{c}$ ，

$$\text{则 } 9\vec{a}^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2 = 25\vec{c}^2, \text{ 所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{由 } 3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}, \text{ 得 } \vec{c} = -\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b},$$

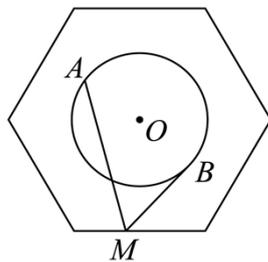
$$\text{所以 } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{2},$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}\right) = -\frac{3}{5}a^2 + \frac{4}{5}b^2 - \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故选：B.

6. 如图，正六边形的边长为 $2\sqrt{2}$ ，半径为 1 的圆 O 的圆心为正六边形的中心，若点 M 在正六边形的边上运动，动点 A, B 在圆 O 上运动且关于圆心 O 对称，则 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的取值范围为 ()



- A. [4,5] B. [5,7] C. [4,6] D. [5,8]

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，由平面向量数量积的运算化简，可得 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = |\vec{MO}|^2 - 1$ ，再由 $|\vec{MO}|$ 的范围，即可得到结果.

$$\begin{aligned} \text{【详解】由题意可得, } \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OA}) \\ &= |\vec{MO}|^2 - |\vec{OA}|^2 = |\vec{MO}|^2 - 1, \end{aligned}$$

$$\text{当 } OM \text{ 与正六边形的边垂直时, } |\vec{MO}|_{\min} = \sqrt{6},$$

$$\text{当点 } M \text{ 运动到正六边形的顶点时, } |\vec{MO}|_{\max} = 2\sqrt{2},$$

所以 $|\vec{MO}| \in [\sqrt{6}, 2\sqrt{2}]$, 则 $|\vec{MO}|^2 \in [6, 8]$, 即 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (|\vec{MO}|^2 - 1) \in [5, 7]$.

故选: B

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2\sqrt{7}$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心, M 为 BC 的中点, $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = 8$, N

是直线 OM 上异于 M 、 O 的任意一点, 则 $\vec{AN} \cdot \vec{BC} =$ ()

A. 3

B. 6

C. 7

D. 9

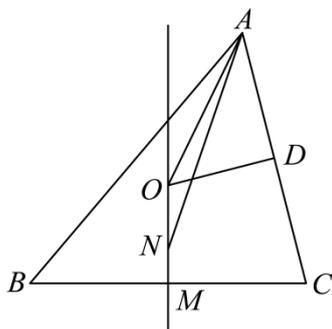
【答案】B

【解析】

【分析】根据外心的性质得到 $OM \perp BC$, 设 $\vec{ON} = \lambda \vec{OM}$, 根据数量积的运算律得到

$\vec{AN} \cdot \vec{BC} = -\vec{AO} \cdot \vec{AB} + \vec{AO} \cdot \vec{AC}$, 再由数量积的定义及几何意义求出 $\vec{AO} \cdot \vec{AC}$, 从而得解.

【详解】因为 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, M 为 BC 的中点, 设 AC 的中点为 D , 连接 OD ,



所以 $OM \perp BC$, $OD \perp AC$, 设 $\vec{ON} = \lambda \vec{OM}$,

则 $\vec{AN} \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{ON}) \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot \vec{BC} + \lambda \vec{OM} \cdot \vec{BC}$

$= \vec{AO} \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \vec{AO} \cdot \vec{BA} + \vec{AO} \cdot \vec{AC} = -\vec{AO} \cdot \vec{AB} + \vec{AO} \cdot \vec{AC}$,

又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $\vec{AO} \cdot \vec{AC} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{AC}| \cos \angle CAO = (|\vec{AO}| \cos \angle CAO) \cdot |\vec{AC}|$

$= \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2 = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{7})^2 = 14$,

所以 $\vec{AN} \cdot \vec{BC} = -\vec{AO} \cdot \vec{AB} + \vec{AO} \cdot \vec{AC} = -8 + 14 = 6$.

故选: B

【点睛】关键点睛：本题解答的关键是根据外接圆的性质将 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC}$ 转化为 $-\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ ，再一个就是利用数量积的几何意义求出 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

8. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$)，若对于任意实数 φ ，函数 $f(x)$ 在区间

$[0, 2\pi]$ 上至少有 2 个零点，至多有 3 个零点，则 ω 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left[1, \frac{4}{3}\right)$ C. $\left[1, \frac{5}{3}\right)$ D.

$\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，将问题转化为研究 $y = \sin \omega x - \frac{1}{2}$ 在任意一个长度为 2π 的区间上的零点问题，分别求得相邻三个零点之间的距离，相邻四个零点之间的最小距离，从而得到关于 ω 的不等式组，解之即可得解。

【详解】因为 φ 为任意实数，故函数 $f(x)$ 的图象可以任意平移，

从而研究函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的零点问题，

即研究函数 $y = \sin \omega x - \frac{1}{2}$ 在任意一个长度为 $2\pi - 0 = 2\pi$ 的区间上的零点问题，

令 $y = \sin \omega x - \frac{1}{2} = 0$ ，得 $\sin \omega x = \frac{1}{2}$ ，则它在 y 轴右侧靠近坐标原点处的零点分别为

$\frac{\pi}{6\omega}, \frac{5\pi}{6\omega}, \frac{13\pi}{6\omega}, \frac{17\pi}{6\omega}, \frac{25\pi}{6\omega}, \dots$ ，

则它们相邻两个零点之间的距离分别为 $\frac{2\pi}{3\omega}, \frac{4\pi}{3\omega}, \frac{2\pi}{3\omega}, \frac{4\pi}{3\omega}, \dots$ ，

故相邻三个零点之间的距离为 $\frac{2\pi}{\omega}$ ，相邻四个零点之间的最小距离为 $\frac{8\pi}{3\omega}$ ，

所以要使函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上至少有 2 个零点, 至多有 3 个零点,

则需相邻三个零点之间的距离不大于 2π , 相邻四个零点之间的最小距离大于 2π ,

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} \leq 2\pi \\ \frac{8\pi}{3\omega} > 2\pi \end{cases}, \text{ 解得 } 1 \leq \omega < \frac{4}{3}, \text{ 即 } \omega \in \left[1, \frac{4}{3}\right).$$

故选: B

【点睛】关键点点睛: 在求解复杂问题时, 要善于将问题进行简单化, 本题中的 φ 以及区间 $[0, 2\pi]$ 是干扰因素, 所以排除干扰因素是解决问题的关键所在.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 4, CA = CB = 8$, 若 H, W, G, I 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心、重心和内心, 则下列四种说法正确的有 ()

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

B. $\overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{BC} = 24$

C. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 16$

D. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据三角形各心的性质结合向量的加减法则即可求得.

【详解】A 选项: H 为垂心, 为高线的交点, 则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 选项 A 正确.

B 选项: $\overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 32 - 8 = 24$, 选项 B 正确;

C 选项: $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3} (|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = 16$, 选项 C 正确;

D 选项: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot |\overrightarrow{AC}| - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| = 8$, 选项 D 错误;

故选: ABC

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/445302241030011304>