第一章　§1.5　全称量词与存在量词

1.5.1　全称量词与存在量词

学习目标

1.理解全称量词、全称量词命题的定义.	2.理解存在量词、存在量词命题的定义.	3.会判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题，并会判断它们的真假.

导语

同学们，生活中，我们经常听到“全体起立，所有人到操场集合，全都不许说话”；我们还经常听到“有的同学考上了清华大学，有的同学没有交作业”. 而这里出现了一些在我们数学中非常重要的量词，“全体，所有的，任意的，有的，存在”等，今天我们就对含有这些量词的命题展开讨论.

内容索引

一

全称量词与全称量词命题

问题1　下列语句是命题吗？比较(1)和(3)，(2)和(4)，它们之间有什么关系？

(1)$x>3$；

(2)$2x+1$是整数；

(3)对所有的$x\in\mathbf{R}$，$x>3$；

(4)对任意一个$x\in\mathbf{Z}$,$2x+1$是整数.

提示　语句(1)(2)中含有变量x，由于不知道变量x代表什么数，无法判断它们的真假，所以它们不是命题.

语句(3)在(1)的基础上，用短语“所有的”对变量x进行限定；

语句(4)在(2)的基础上，用短语“任意一个”对变量x进行限定，从而使(3)(4)成为可以判断真假的语句，因此语句(3)(4)是命题.

全称量词与全称量词命题

全称量词	所有的、任意一个、一切、每一个、任给
符号表示	___∀___
全称量词命题	含有___全称量词___的命题
形式	“对M中___任意___一个x，$p(x)$成立”，可用符号简记为“$\forall x \in M$，$p(x)$”

注意点：

(1)从集合的观点看全称量词命题是陈述某集合中的所有的元素都具有某种性质的命题，全称量词表示的数量可能是有限的，也可能是无限的，由题目而定.

(2)有些全称量词命题中的全称量词是省略的，理解时需要把它补充出来，例如：命题“平行四边形的对角线互相平分”应理解为“所有的平行四边形的对角线都互相平分”.

(3)要判定全称量词命题“$\forall x \in M$，$p(x)$”是真命题，需要对集合M中每个元素x，证明$p(x)$成立.

(4)要判定全称量词命题“$\forall x \in M$，$p(x)$”是假命题，只需举出一个反例即可.

例1 判断下列命题是否为全称量词命题，并判断真假.

(1)对任意直角三角形的两锐角A，B，都有$\sin A=\cos B$；

解

含有全称量词“任意”，故是全称量词命题，真命题

.

(2)自然数的平方大于或等于零；

解

全称量词命题.表示为$\forall n\in \mathbf{N}$，$n^2\geqslant 0$.真命题.

(3)所有的二次函数的图象的开口都向上.

解

全称量词命题.对于任意二次函数，它的图象的开口都向上.假命题.

反思感悟

(1)判断一个命题是否为全称量词命题，主要看命题中是否有“所有的，任意一个，一切，每一个，任给”等表示全体的量词，有些命题的全称量词是隐藏的，要仔细辨别.

(2)判断真假时用直接法或间接法，直接法就是对陈述的集合中每一个元素都要使结论成立，间接法就是找到一个元素使结论不成立即可.

跟踪训练1 判断下列全称量词命题的真假.

(1)每个四边形的内角和都是360°;

解

真命题.

(2)任何实数都有算术平方根;

解

负数没有算术平方根，假命题.

(3)$\forall x\in\{y|y$是无理数$\}$，x^2是无理数.

解

$x=\sqrt{2}$是无理数，但$x^2=2$是有理数，假命题.

二

存在量词与存在量词命题

问题2　下列语句是命题吗？比较(1)和(3)，(2)和(4)，它们之间有什么关系？

(1)$2x+1=3$；

(2)x能被2和3整除；

(3)存在一个$x\in\mathbf{R}$，使$2x+1=3$；

(4)至少有一个$x\in\mathbf{Z}$，x能被2和3整除.

提示　容易判断，(1)(2)不是命题.

语句(3)在(1)的基础上，用短语“存在一个”对变量x的取值进行限定；语句(4)在(2)的基础上，用“至少有一个”对变量x的取值进行限定，从而使(3)(4)变成了可以判断真假的陈述句，因此(3)(4)是命题.

存在量词与存在量词命题

存在量词	存在一个、至少有一个、有一个，有些、有的、对某些
符号表示	$\underline{\exists}$
存在量词命题	含有<u>存在量词</u>的命题
形式	“存在M中的元素x，$p(x)$成立”可用符号简记为“$\underline{\exists x\in M, p(x)}$”

注意点：

(1)从集合的角度看，存在量词命题是陈述某集合中有或存在一些或至少一个元素具有某种性质的命题.

(2)有些命题可能没有写出存在量词，但其意义具备“存在”“有一个”等特征的命题都是存在量词命题.

(3)要判断存在量词命题“$\exists x\in M$，$p(x)$”是真命题，只需要在集合M中找到一个元素x，使$p(x)$成立即可.

(4)要判断一个存在量词命题是假命题，需对集合M中的任意一个元素x，证明$p(x)$都不成立.

例2 判断下列命题是否为存在量词命题，并判断真假.

(1)有些整数既能被2整除，又能被3整除；

解

存在量词命题，表示为$\exists x\in \mathbf{Z}$，x既能被2整除，又能被3整除.真命题.

(2)某个四边形不是平行四边形；

解

存在量词命题，表示为$\exists x\in\{y|y$是四边形$\}$，x不是平行四边形.真命题.

(3)方程$3x-2y=10$有整数解；

解

可改写为存在一对整数x，y，使$3x-2y=10$成立.故为存在量词命题.

真命题.

(4)有一个实数x，使$x^2+2x+4=0$.

解

存在量词命题，由于$\Delta=2^2-4\times4=-12<0$，因此方程无实根.假命题.

反思感悟

(1)判断一个命题是否为存在量词命题，主要看命题中是否有“存在一个，至少有一个，有些，有一个，对某些，有的”等表示部分的量词，有些命题的存在量词是隐藏的，要仔细辨别.

(2)判断真假时用直接法或间接法，直接法就是对陈述的集合中有一个元素使结论成立即可，间接法就是对集合中所有的元素使结论不成立.

跟踪训练2 判断下列存在量词命题的真假.

(1)存在一个四边形，它的两条对角线互相垂直；

解

菱形的对角线互相垂直，真命题.

(2)至少有一个整数n，使得n^2+n为奇数；

解

$n^2+n=n(n+1)$，故n和$n+1$必为一奇一偶，其乘积为偶数，假命题.

(3)$\exists x\in\{y|y$是无理数$\}$，x^2是无理数.

解

当$x=\pi$时，x^2仍是无理数，真命题.

返回

三

依据含量词命题的真假求参数的取值范围

例3 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且$B\neq\varnothing$，若命题$p$：“$\forall x\in B$，$x\in A$”是真命题，求$m$的取值范围.

解

由于命题p：“$\forall x\in B$，$x\in A$”是真命题，

所以 $B\subseteq A$，因为 $B\neq\varnothing$，所以$\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \end{cases}$

解得$2\leqslant m\leqslant 3$.

即m的取值范围为$\{m|2\leqslant m\leqslant 3\}$.

延伸探究

1.把本例中命题p改为“$\exists x\in A$，$x\in B$”，求m的取值范围.

解

p为真，则$A\cap B\neq\varnothing$，因为$B\neq\varnothing$，所以$m\geqslant 2$.

所以$\begin{cases}-2\leqslant m+1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2\end{cases}$ 或$\begin{cases}-2\leqslant 2m-1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2,\end{cases}$

解得$2\leqslant m\leqslant 4$.

2.把本例中的命题p改为“$\forall x\in A$，$x\in B$”，是否存在实数m，使命题p是真命题？若存在，求出实数m的取值范围；若不存在，说明理由.

解

由于命题p：“$\forall x\in A$，$x\in B$”是真命题，

所以$A\subseteq B$，$B\neq\varnothing$，

所以$\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1\leqslant -2, \\ 2m-1\geqslant 5, \end{cases}$ 无解，

所以不存在实数m，使命题p是真命题.

反思感悟

依据含量词命题的真假求参数取值范围问题的求解方法

(1)首先根据全称量词和存在量词的含义透彻地理解题意.

(2)其次根据含量词命题的真假把命题的真假问题转化为集合间的关系或函数的最值问题，再转化为关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.