安徽省合肥市部分学校2024届高三下学期高考适应性考试数学试题

考生注意：

1．本试卷分选择题和非选择题两部分.满分150分，考试时间120分钟.

2．答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚.

3．考生作答时，请将答案答在答题卡上.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效.

4．本卷命题范围：高考范围.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|\ x^2\le 4\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式可得集合A，进而可得 $A\cap B$.

【详解】$A=\{x\in\mathbf{N}|\ x^2\le 4\}=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，

故选：B.

2. 已知 $z(\mathrm{i}-3)=\overline{z}+2$，则 $z=$（　　）

A. $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\mathrm{i}$　　B. $\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\mathrm{i}$

C. $-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，根据题意，结合复数的乘法运算和相等复数建立方程组，解之即可求解.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

因为 $z(\mathrm{i}-3)=\overline{z}+2$，所以 $(a+b\mathrm{i})(\mathrm{i}-3)=a-b\mathrm{i}+2$，

即 $-3a-b+(a-3b)\mathrm{i}=a+2-b\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}-3a-b=a+2\\ a-3b=-b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{4}{9}\\ b=-\dfrac{2}{9}\end{cases}$，

所以 $z=-\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}\mathrm{i}$.

故选：D.

3. 已知某圆锥的侧面展开图是一个半径为 8 的半圆，则该圆锥的体积为（　　）

A. 48π　　B. 16π　　C. $64\sqrt{3}\pi$　　D. $\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】设圆锥的底面半径，结合侧面展开图可知底面半径与高，进而可得体积.

【详解】设圆锥的底面圆半径为 r，

由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则 $2\pi r=8\pi$，解得 $r=4$，

又侧面展开图是半径为 8 的半圆，即圆锥的母线长为 8，

则圆锥的高 $h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

所以该圆锥的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times4^2\times4\sqrt{3}=\dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}$，

故选：D.

4. 为弘扬我国优秀的传统文化，某市教育局对全市所有中小学生进行了言语表达测试，经过大数据分析，发现本次言语表达测试成绩服从 $N(70,64)$，据此估计测试成绩不小于 94 的学生所占的百分比为（　　）

参考数据：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx0.6827, P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx0.9545, P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx0.9973$

A. 0.135%　　B. 0.27%　　C. 2.275%　　D. 3.173%

【答案】A

【解析】

【分析】根据正态分布的对称性求得正确答案.

【详解】依题意 $\mu=70,\sigma=8,94=\mu+3\sigma$，

所以测试成绩不小于 94 的学生所占的百分比为 $\dfrac{1-0.9973}{2}\times100\%=0.135\%$．

故选：A．

5. 某银行大额存款的年利率为 3%，小张于 2024 年初存入大额存款 10 万元，按照复利计算 8 年后他能得到的本利和约为（　　）（单位：万元，结果保留一位小数）

A. 12.6　　B. 12.7　　C. 12.8　　D. 12.9

【答案】B

【解析】

【分析】根据复利可知每年末本息和构成等比数列，利用等比数列通项公式及二项式定理求解即可.

【详解】存入大额存款 10 万元，按照复利计算，

每年末本利和是以 10 为首项，$1+3\%$ 为公比的等比数列，

所以本利和 $S=10(1+3\%)^8=10\left[C_8^0+C_8^1\times0.03^1+C_8^2\times0.03^2+\cdots+C_8^7\times0.03^7+C_8^8\right]\approx12.7$．

故选：B．

6. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$ 且 $f(x)+f(2-x)=4$，则 $\sum\limits_{i=0}^{2024}f(i)=$（　　）

A. 4049　　B. 2025　　C. 4048　　D. 2024

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数的周期性与对称性可得解.

【详解】由 $f(x)+f(2-x)=4$，

令 $x=1$，得 $f(1)=2$，

又令 $x=0$ 得 $f(2)=3$，

再令 $x=-1$，$f(-1)+f(3)=4$，

又 $f(-1)=f(1)=2$，所以 $f(3)=2$，

又 $f(x+4)+f(-x-2)=f(x+4)+f(x+2)=4$，$f(-x)+f(2+x)=f(x)+f(2+x)=4$，

所以 $f(x+4)=f(x)$，4 为 $f(x)$ 的一个周期，$f(4)=f(0)=1$，

即 $\sum_{i=0}^{2024} f(i) = f(0) + 506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)] = 1 + 506\times(2+3+2+1) = 4049$，

故选：A．

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 与 C 的渐近线在第二象限的交点为 P，若 $\tan\angle FPO=\sqrt{2}$，则 C 的离心率为（　　）

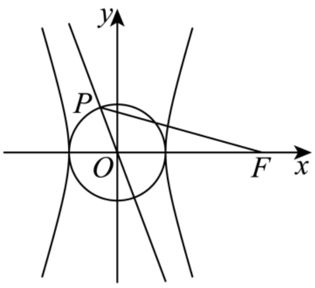
A. 2　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ 解得 $P(-\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$，根据三角函数的定义知 $\sin\angle POF=\frac{b}{c},\cos\angle POF=-\frac{a}{c}$，利用同角的三角函数关系求得 $\cos\angle FPO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle FPO=\frac{\sqrt{6}}{3}$，由诱导公式、两角和的正弦公式和正弦定理计算可得 $\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$，结合离心率的概念即可求解.

【详解】如图，由题意知，双曲线的渐近线方程为 $y=-\frac{b}{a}x$，



则 $\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x^2=\frac{a^4}{c^2} \\ x^2=\frac{a^2b^2}{c^2} \end{cases}$，所以 $P(-\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$，

由三角函数的定义知 $\sin\angle POF=\frac{b}{c},\cos\angle POF=-\frac{a}{c}$，

又 $\tan\angle FPO=\sqrt{2}$，且显然 $\angle FPO$ 为锐角，$\sin\angle FPO=\sqrt{2}\cos\angle FPO$，

又 $\sin^2\angle FPO+\cos^2\angle FPO=1$，解得 $\cos\angle FPO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle FPO=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

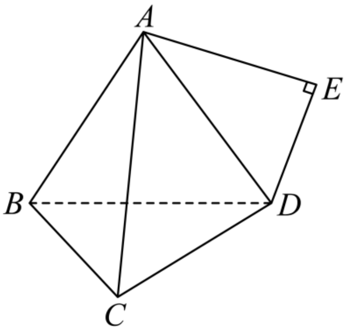
则 $\sin\angle PFO=\sin(\angle OPF+\angle POF)=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{a}{c}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}b-\sqrt{6}a}{3c}$，

在$\triangledown POF$中，由正弦定理可得$\dfrac{|OP|}{\sin\angle PFO}=\dfrac{|OF|}{\sin\angle OPF}$，即$\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}b-\sqrt{6}a}{3c}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，

化简得$\dfrac{b}{a}=2\sqrt{2}$，所以C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=3$．

故选：C．

8. 如图，正四面体$ABCD$的棱长为2，点E在四面体$ABCD$外侧，且$\triangle AED$是以E为直角顶点的等腰直角三角形．现以AD为轴，点E绕AD旋转一周，当三棱锥$E-BCD$的体积最小时，直线CE与平面BCD所成角的正弦值的平方为（　　）



A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$　　D. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{12}$

【答案】D

【解析】

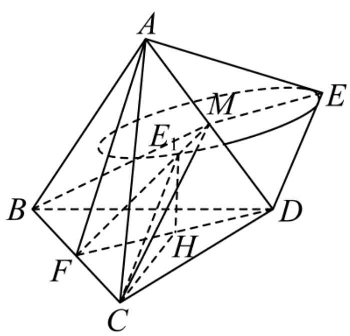
【分析】取BC中点F，取AD中点M，确定点E的轨迹，从而结合三棱锥$E-BCD$的体积最小，确定E点所处位置，进而作出直线CE与平面BCD所成角，解三角形，求出相关线段长，即可求得答案.

【详解】在正四面体$ABCD$中，取BC中点F，连接DF,AF，则$DF=AF$，

取AD中点M，连接FM,EM，则$FM\perp AD$，

$\triangle AED$是以E为直角顶点的等腰直角三角形，正四面体$ABCD$的棱长为2，

则$EM\perp AD$，且$EM=\dfrac{1}{2}AD=1$，



点 E 绕 AD 旋转一周，形成的图形为以 M 为圆心，以 $EM=1$ 为半径的圆，

设该圆与 MF 的交点为 E_1，当三棱锥 $E-BCD$ 的体积最小时，即 E 点到底面 BCD 的距离最小，

即此时 E 点即位于 E_1 处，

因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，则 $DF=AF=\sqrt{3}$，

又 AD 中点为 M，则 $FM=\sqrt{AF^2-AM^2}=\sqrt{2}$，则 $FE_1=\sqrt{2}-1$，

设点 E_1 在底面 BCD 上的射影为 H，则 $E_1H=E_1F\cdot\sin\angle E_1FH=E_1F\cdot\dfrac{MD}{FD}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$，

又 $MB=MC$，BC 中点为 F，故 $MF\perp BC$，

故 $E_1C=\sqrt{FC^2+(E_1F)^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$，

由于点 E_1 在底面 BCD 上的射影为 H，故 $\angle E_1CH$ 即为直线 CE_1 与平面 BCD 所成角，

故 $\sin^2\angle E_1CH=\dfrac{(E_1H)^2}{(E_1C)^2}=\dfrac{\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{4-2\sqrt{2}})^2}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{12-6\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{12}$，

故选：D

【点睛】关键点睛：本题考查在四面体中求解线面角的正弦值问题，解答时要发挥空间想象，明确空间的点、线、面的位置关系，解答的关键在于确定 E 点的轨迹，从而确定三棱锥 $E-BCD$ 的体积最小时 E 点的位置，由此作出直线 CE 与平面 BCD 所成角，解三角形，求得答案.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知 x_1,x_2 是函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的两个零点，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值是 $\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

D. $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上仅有 1 个零点

【答案】ABD

【解析】

【分析】依题意可得$f(x)$的最小正周期$T=\pi$，即可求出ω，从而得到$f\left(x\right)$解析式，再根据正弦函数的性质一一判断即可.

【详解】由题意可知，函数$f(x)$的最小正周期$T=2\times\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

对于A，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，

因为$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，故A正确；

对于B，因为$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，

所以$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称，故B正确；

对于C，将$g(x)=2\sin 2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到：

$y=2\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\neq f(x)$，故C错误；

对于D，当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，仅当$2x-\frac{\pi}{6}=\pi$，即$x=\frac{7\pi}{12}$时，$f(x)=0$，

即$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上仅有1个零点，故D正确.

故选：ABD.

10. 已知实数a,b满足$0<a<b<1$，则（　　）

A. $\frac{b}{a}<\frac{b-1}{a-1}$

B. $a+b>ab$

C. $a^b<b^a$

D. $2^a-2^b<\log_{\frac{1}{2}}a-\log_{\frac{1}{2}}b$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据题意，利用作差比较法，结合不等式的性质，可判定A错误，B正确；令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，利用导数求得函数的单调性，得到$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，进而判定C正确；结合$g(x)=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，可判定D正确.

【详解】对于 A 中，由$0<a<b<1$，可得$\frac{b}{a}-\frac{b-1}{a-1}=\frac{a-b}{a(a-1)}>0$，所以 A 错误；

对于 B 中，由$a+b-ab=a+b(1-a)>0$，则$a+b>ab$，所以 B 正确；

对于 C 中，令$\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$，可得$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当$0<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

因为$0<a<b<1$，则$f(a)<f(b)$，所以$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，即$b\ln a<a\ln b,\ln a^b<\ln b^a$，

所以$a^b<b^a$，所以 C 正确；

对于 D 中，由函数$g(x)=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$0<a<b<1$，则$g(a)<g(b)$，即$2^a-\log_{\frac{1}{2}}a<2^b-\log_{\frac{1}{2}}b$，

所以$2^a-2^b<\log_{\frac{1}{2}}a-\log_{\frac{1}{2}}b$，所以 D 正确.

故选：BCD.

11. 椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的两个焦点分别为$F_1,F_2$，则下列说法正确的是（　　）

A. 过点F_2的直线与椭圆C交于A，B两点，则$\triangle ABF_1$的周长为 8

B. 若C上存在点P，使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$m$的取值范围为$\left(0,\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$

C. 若直线$kx-y+1=0$与C恒有公共点，则m的取值范围为$[1,+\infty)$

D. 若$m=1,P$为C上一点，$Q(-1,0)$，则$|PQ|$的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】BD

【解析】

【分析】对于 A：根据椭圆的定义结合焦点所在的位置分析判断；对于 B：分析可知当P位于短轴顶点时，$\angle F_1PF_2$最大，此时$\frac{b^2}{a^2}\leq\frac{1}{2}$，分类讨论焦点所在位置分析求解；对于 C：因为直线$kx-y+1=0$过定点$(0,1)$，可知定点$(0,1)$在椭圆内或椭圆上，列式求解即可；对于 D：设$P\left(2\cos\theta,\sin\theta\right)$，根据两点间距离公式结合二次函数分析求解.

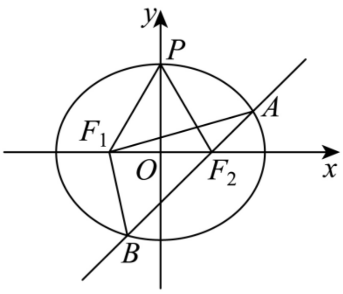
【详解】对于选项 A：由椭圆定义可得$\triangle ABF_1$的周长为

$|AF_1|+|BF_2|+|AB|=|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=4a$，

但焦点不一定在x轴上，故A错误；

对于选项B：若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$PF_1\perp PF_2$，

当P位于短轴顶点时，$\angle F_1PF_2$最大，此时$\cos\angle OPF_1\le\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，



可知$\frac{b}{a}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{b^2}{a^2}\le\frac{1}{2}$，

当$0<m<2$时，由$\frac{m^2}{4}\le\frac{1}{2}$，解得$0<m\le\sqrt{2}$；

当m>2时，由$\frac{4}{m^2}\le\frac{1}{2}$，解得$m\ge2\sqrt{2}$；

综上所述：m的取值范围为$\left(0,\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$，故B正确；

对于选项C：因为直线$kx-y+1=0$过定点$(0,1)$，则$\frac{1}{m^2}\le1$，即$m^2\ge1$，

又因为$m^2\ne4$，且$m>0$，所以m的取值范围为$[1,2)\cup(2,+\infty)$，故C错误；

对于选项D：若$m=1$，即椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

设$P\left(2\cos\theta,\sin\theta\right)$，可得$|PQ|=\sqrt{\left(2\cos\theta+1\right)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{3\left(\cos\theta+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}$，

当$\cos\theta=-\frac{2}{3}$时，$|PQ|_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故D正确.

故选：BD.

【点睛】方法点睛：与圆锥曲线有关的取值范围问题的三种解法

（1）数形结合法：利用待求量的几何意义，确定出极端位置后数形结合求解；

（2）构建不等式法：利用已知或隐含的不等关系，构建以待求量为元的不等式求解；

（3）构建函数法：先引入变量构建以待求量为因变量的函数，再求其值域.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{2}{3}\tan\theta$，则 $\tan 2\theta=$______.

【答案】$-\dfrac{3}{4}$

【解析】

【分析】利用两角和差的正切公式计算 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，再使用二倍角的正切公式即可.

【详解】由 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{2}{3}\tan\theta$，

且 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

得 $\dfrac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-\dfrac{2}{3}\tan\theta$，

整理得 $2\tan^2\theta-5\tan\theta-3=0$，

解得 $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$（舍）或 $\tan\theta=3$，

所以 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times 3}{1-3^2}=-\dfrac{3}{4}$.

故答案为：$-\dfrac{3}{4}$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】根据题意，求得 $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|$ 和 $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)=0$，设 D 为线段 AB 上靠近 A 的四等分点，得到 $CD\perp AB$，设 $AD=t$，求得 $CD=\sqrt{15}t,BC=2\sqrt{6}t$，即可求解.

【详解】由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，可得 $\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})=0$，

即 $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC})=0$，可得 $\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AC}^2=0$，所以 $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|$，

又由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，可得 $\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AC})=0$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)=0$，

设 D 为线段 AB 上靠近 A 的四等分点，则 $CD\perp AB$，