专题 18 导数及其应用小题综合

冲刺秘籍

1. 八大常用函数的求导公式

$C'=0$（C 为常数）

$(x^n)'=nx^{n-1}$；例：$(x^5)'=5x^4$，$(x^{\frac{2}{5}})'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$，$(x^{-6})=-6x^{-7}$，$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\ln a$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$

2. 导数的四则运算

（1）和的导数：$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$

（2）差的导数：$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$

（3）积的导数：$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$（前导后不导＋前不导后导）

（4）商的导数：$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，$g(x)\neq 0$

3. 复合函数的求导公式

函数 $y=f(g(x))$ 中，设 $u=g(x)$（内函数），则 $y=f(u)$（外函数）$\therefore y'=y_u{}'\cdot u_x{}'$

4. 导数的几何意义

（1）导数的几何意义

导数 $f'(x)$ 的几何意义是曲线 $f(x)$ 在某点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率

（2）直线的点斜式方程

直线的点斜式方程：已知直线过点 $P(x_0,y_0)$，斜率为 k，则直线的点斜式方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$

5. 用导数判断原函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数.

6. 判别 $f(x_0)$ 是极大（小）值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，

（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；

（2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.

冲刺训练

一、单选题

1．（2023·全国·模拟预测）过点 $(2,0)$ 作曲线 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的两条切线，切点分别为 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$，$\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$，则 $x_1+x_2=$（　）

A．-2　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】D

【分析】根据导数的几何意义列式可得 $x_0^2-2x_0-2=0$，再根据韦达定理即可得答案.

【详解】由题意得 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，

过点 $(2,0)$ 作曲线 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的两条切线，设切点坐标为 $\left(x_0,x_0\mathrm{e}^{x_0}\right)$，

则 $(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{x_0\mathrm{e}^{x_0}}{x_0-2}$，即 $(x_0^2-2x_0-2)\mathrm{e}^{x_0}=0$，

由于 $\mathrm{e}^{x_0}>0$，故 $x_0^2-2x_0-2=0$，$\Delta=12>0$，

由题意可知 x_1,x_2 为 $x_0^2-2x_0-2=0$ 的两个解，

故 $x_1+x_2=2$，

故选：D

2．（2023·福建福州·福州四中校考模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x-x+\left|x-a\right|$，若 $f\left(x\right)$ 有且仅有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\right)\cup\left(0,\mathrm{e}\right)$　B．$\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$　　C．$\left(-\dfrac{2}{e},3\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},3\right)$

【答案】A

【分析】将题意转化为 $y=\left|x-a\right|$ 与 $y=x-x\ln x$ 存在两个交点，令 $g\left(x\right)=x-x\ln x$，对 $g\left(x\right)$ 求导，令 $g'\left(x\right)=1$ 或者 $g'\left(x\right)=-1$，求出 $g\left(x\right)$ 斜率为 ±1 的切线方程，即可求出两条切线在 x 轴上的截距，可得实数 a 的取值范围.

【详解】解析：由 $f(x)=0$ 可知 $|x-a|=x-x\ln x$，即 $y=|x-a|$ 与 $y=x-x\ln x$ 存在两个交点，

令 $g(x)=x-x\ln x$，则 $g'(x)=-\ln x$，

令 $g'(x)=-\ln x>0$，解得：$0<x<1$，令 $g'(x)=-\ln x<0$，解得 $x>1$，

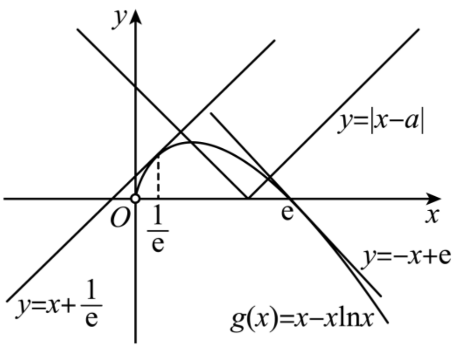
所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

令 $g'(x)=1$，解得 $x=\frac{1}{e}$，

则 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{e}$ 处的切线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$；

令 $g'(x)=-1$，解得 $x=e$，则 $g(x)$ 在 $x=e$ 处的切线方程为 $y=-x+e$，

所以 $y=|x-a|$ 与 $g(x)=x-x\ln x$ 的图象如下表：



且这两条切线在 x 轴上的截距分别为 $-\frac{1}{e},e$，$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{e},0\right)\cup(0,e)$.

故选：A.

3．（2023·贵州毕节·校考模拟预测）已知函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-a$ 与 $g(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ 的图象有交点，则 a 的取值范围为（　）

A．$[2,+\infty)$　　B．$\left[e-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$\left(-\infty,e^{-\frac{1}{2}}\right]$

【答案】B

【分析】转化为 $a=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-\frac{e^{-x}}{x}$ 在 $x<0$ 时有解，令 $h(x)=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-\frac{e^{-x}}{x}(x<0)$，利用导数判断单调性可得答案.

【详解】因为函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-a$ 与 $g(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ 的图象有交点，

所以 $\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-a=\frac{e^{-x}}{x}$ 在 $x<0$ 时有解，$a=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-\frac{e^{-x}}{x}$，

令 $h(x)=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{-x}-\frac{e^{-x}}{x}(x<0)$， $h'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{-x}}+\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}=\frac{2(x+1)e^{-x}+x^2+x}{2x^2}$，

令 $t(x)=2(x+1)e^{-x}+x^2+x(x<0)$，

$t'(x)=2(x+1)'e^{-x}+2(x+1)(e^{-x})'+2x+1=\frac{2x(-1+e^x)+e^x}{e^x}$，

因为 $x<0$，所以 $x(-1+e^x)>0, e^x>0$，可得 $t'(x)=\frac{2x(-1+e^x)+e^x}{e^x}>0$，

故 $t(x)$ 在 $x<0$ 上单调递增，又 $t(-1)=2(-1+1)e^1+1-1=0$，

所以当 $x<-1$ 时 $t(x)<0$，即 $h'(x)<0$， $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，

当 $-1<x<0$ 时 $t(x)>0$，即 $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，

所以 $a=h(x)\geq h(-1)=\frac{-1}{2}+\ln\sqrt{1}-\frac{e^1}{-1}=e-\frac{1}{2}$.

故选：B.

4．（2023·海南海口·校考模拟预测）已知$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$x=m$ 为函数 $f(x)=\frac{x+x\ln x}{x-1}$（$x>1$）的极值点，则 $f([m])=$（ ）

A．$\frac{3+3\ln 3}{2}$　　B．$\frac{4+4\ln 4}{3}$　　C．$\frac{5+5\ln 5}{4}$　　D．$\frac{6+6\ln 6}{5}$

【答案】A

【分析】求导函数 $f'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，令 $g(x)=x-\ln x-2$， $x>1$，求导从而可确定 $g(x)$ 的零点取值情况，即可得函数 $f(x)$ 的极值点的估计值，从而可求 $f([m])$ ．

【详解】函数 $f(x)=\frac{x+x\ln x}{x-1}$， $x>1$，则 $f'(x)=\frac{(2+\ln x)(x-1)-(x+x\ln x)}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$

令 $g(x)=x-\ln x-2$， $x>1$

则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(3)=1-\ln 3<0$， $g(4)=2-\ln 4>0$

所以，函数 $g(x)=x-\ln x-2,(x>1)$ 存在唯一零点 $x_0\in(3,4)$.

x	$(1,x_0)$	$(x_0,+\infty)$

$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	单调递减	单调递增

所以 $x=x_0\in(3,4)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，即 $m=x_0\in(3,4)$，$f([m])=f(3)=\dfrac{3+3\ln3}{2}$.

故选：A.

5．（2023·重庆巴南·统考一模）已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(4+x)=f(4-x)$，$f(0)=-1$，且当 $x\in(0,4]$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.若关于 x 的不等式 $f(x)>a$ 在 $[-48,48]$ 上有且只有 60 个整数解，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-1,0]$　　B．$\left[0,\dfrac{\ln2}{2}\right)$　　C．$\left(-1,\dfrac{\ln2}{2}\right)$　　D．$\left[\dfrac{\ln2}{2},\dfrac{\ln3}{3}\right)$

【答案】B

【分析】分析可知，函数 $f(x)$ 是周期为8的周期函数，由题意可得关于 x 的不等式 $f(x)>a$ 在 $[0,8)$ 上有且只有5个整数解，数形结合可得出实数 a 的取值范围.

【详解】因为偶函数 $f(x)$ 满足 $f(4+x)=f(4-x)$，则 $f(x+4)=f(x-4)$，即 $f(x+8)=f(x)$，

所以，函数 $f(x)$ 是周期为8的周期函数，

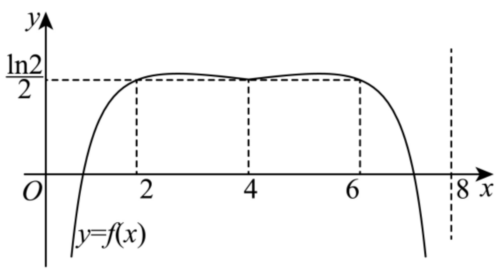
当 $x\in(0,4]$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\mathrm{e}$.

由 $f'(x)>0$ 可得 $0<x<\mathrm{e}$，由 $f'(x)<0$ 可得 $\mathrm{e}<x\le4$.

所以，函数 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},4]$ 上单调递减，

因为关于 x 的不等式 $f(x)>a$ 在 $[-48,48]$ 上有且只有 60 个整数解，

则关于 x 的不等式 $f(x)>a$ 在 $[0,8)$ 上有且只有5个整数解，如下图所示：



因为 $f(4)=\dfrac{\ln4}{4}=\dfrac{2\ln2}{4}=\dfrac{\ln2}{2}=f(2)$，且 $f(6)=f(2)$，

又因为 $f(3)>f(4)$，所以，要使得不等式 $f(x)>a$ 在 $[0,8)$ 上有且只有5个整数解，

则这五个整数解分别为3、5、2、4、6，

所以，$f(2)>a\ge f(1)$，即$0\le a<\frac{\ln 2}{2}$，

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题考查利用不等式的整数解的个数求参数的取值范围，解题的关键在于作出函数的图象，明确整数解是哪些整数，再结合图形求解.

6.（2023·福建宁德·校考模拟预测）将一个半径为2的球削成一个体积最大的圆锥，则该圆锥的内切球的半径为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$　　B．$\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}$

C．$\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$　　D．$\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$

【答案】D

【分析】设圆锥的底面半径为r，则圆锥的高为$2+\sqrt{4-r^2}$，表示出圆锥的体积，换元后利用导数可求出体积的最大值，从而可求出圆锥的底面半径和高，再求出母线长，作出圆锥的截面，然后利用三角形相似可求出圆锥内切圆的半径.

【详解】设圆锥的底面半径为r，则圆锥的高为$2+\sqrt{4-r^2}$，

所以圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi r^2\left(2+\sqrt{4-r^2}\right)$，

令$t=\sqrt{4-r^2}$（$0\le t<2$），则$r^2=4-t^2$，

所以$V(t)=\frac{1}{3}\pi\left(4-t^2\right)(2+t)=\frac{1}{3}\pi\left(-t^3-2t^2+4t+8\right)$，

则$V'(t)=\frac{1}{3}\pi\left(-3t^2-4t+4\right)=-\frac{1}{3}\pi(t+2)(3t-2)$，

当$0\le t<\frac{2}{3}$时，$V'(t)>0$，当$\frac{2}{3}<t<2$时，$V'(t)<0$，

所以$V(t)$在$\left[0,\frac{2}{3}\right)$上递增，在$\left(\frac{2}{3},2\right)$上递减，

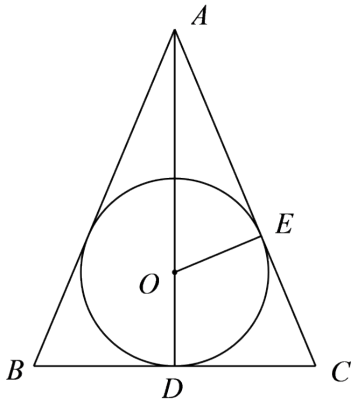
所以当$t=\frac{2}{3}$，即$r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$时，圆锥的体积最大，此时圆锥的高为$\frac{8}{3}$，母线长为$l=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，

设圆锥的内切球半径为R，圆锥的截面如图所示,

则$AD=\frac{8}{3},AC=\frac{4\sqrt{6}}{3},DC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$AO=\frac{8}{3}-R$，$OD=OE=R$，

因为$\triangle AOE\backsim \triangle ACD$，所以$\dfrac{OE}{CD}=\dfrac{AO}{AC}$，$\dfrac{R}{\frac{4\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{\frac{8}{3}-R}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$，解得$R=\dfrac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$，

故选：D



【点睛】关键点点睛：此题考查圆锥的内切球问题，解题的关键是表示出圆锥的体积，化简后利用导数求出其最大值，从而可确定出圆的大小，考查空间想象能力和计算能力，属于较难题.

7．(**2023·江苏南京·南京市第一中学校考模拟预测**)已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\ln x$，$g\left(x\right)=ax+b$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$恒成立，则$a+b$的最大值为（　）

A．e　　B．1　　C．-1　　D．$-\mathrm{e}$

【答案】A

【分析】令$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\ln x-ax-b$，其中$x\in\left(0,+\infty\right)$，分析可知，存在$x_0\in\left(0,+\infty\right)$，使得$q\left(x_0\right)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-a=0$，可得出$a=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}$，由题意可得出$h\left(x_0\right)\geq 0$，可得出$b\leq\left(1-x_0\right)\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0+1$，由此可得出$a+b\leq\left(2-x_0\right)\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0+1$，令$n\left(x\right)=\left(2-x\right)\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}-\ln x+1$，其中$x>0$，利用导数求出函数$n\left(x\right)$的最大值，即为$a+b$的最大值.

【详解】令$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\ln x-ax-b$，其中$x\in\left(0,+\infty\right)$，则$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}-a$，

令$p\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}-a$，其中$x>0$，则$p'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$，

故函数$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}-a$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，

①当$a<0$时，$p\left(1\right)=\mathrm{e}-1-a>0$，$\mathrm{e}-a+1>1$，则$0<\dfrac{1}{\mathrm{e}-a+1}<1$，

所以，$p\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}-a+1}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-a+1}}-\left(\mathrm{e}-a+1\right)-a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-a+1}}-\mathrm{e}-1<0$，

所以，存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e-a+1},1\right)$，使得 $p(x_0)=0$；

②当 $a=0$ 时，$p(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $p(1)=e-1>0$，$p\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，

所以，存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $p(x_0)=0$；

③当 $a>0$ 时，令 $q(x)=xe^x-ax-1$，则 $q(0)=-1<0$，

令 $m(x)=e^x-x-1$，则 $m'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$m'(x)<0$，此时函数 $m(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$m'(x)>0$，此时函数 $m(x)$ 单调递增，

所以，$m(x)\geq m(0)=0$，即 $e^x\geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以，$q(e^a)=e^a\cdot e^{e^a}-ae^a-1>e^a\cdot(e^a+1)-ae^a-1=(e^a-a)e^a+e^a-1>0$，

所以存在 $x_0\in(0,e^a)$，使得 $q(x_0)=0$，即 $p(x_0)=\frac{q(x_0)}{x_0}=0$.

由上可知，对任意的 $a\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $q(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}-a=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 单调递增，

所以，$h(x)\geq h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-ax_0-b=e^{x_0}-\ln x_0-x_0\left(e^{x_0}-\frac{1}{x_0}\right)-b$

$=(1-x_0)e^{x_0}-\ln x_0+1-b\geq 0$，则 $b\leq(1-x_0)e^{x_0}-\ln x_0+1$，

所以，$a+b\leq e^{x_0}-\frac{1}{x_0}+(1-x_0)e^{x_0}-\ln x_0+1=(2-x_0)e^{x_0}-\frac{1}{x_0}-\ln x_0+1$，

令 $n(x)=(2-x)e^x-\frac{1}{x}-\ln x+1$，其中 $x>0$，

所以，$n'(x)=(1-x)e^x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=(1-x)\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)$，

当 $0<x<1$ 时，$n'(x)>0$，此时函数 $n(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$n'(x)<0$，此时函数 $n(x)$ 单调递减，

所以，$n(x)_{\max}=n(1)=e$，即 $a+b$ 的最大值为 e.

故选：A.

【点睛】方法点睛：求函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最值的方法：

（1）若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调，则$f(a)$与$f(b)$一个为最大值，另一个为最小值；

（2）若函数$f(x)$在区间$[a,b]$内有极值，则要求先求出函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的极值，再与$f(a)$、$f(b)$比大小，最大的为最大值，最小的为最小值；

（3）若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上只有唯一的极大点，则这个极值点就是最大（最小）值点，此结论在导数的实际应用中经常用到.

8.（2023·福建三明·统考三模）已知函数$f(x)=\log_2(4^x+4)-x-1$，设$a=f\left(\frac{19}{10}\right)$，$b=f\left(\tan\frac{1}{10}\right)$，$c=f\left(\ln\frac{11}{10}\right)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　）

A．$b<c<a$　　B．$a<c<b$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

【答案】C

【分析】首先分析函数$f(x)$的单调性和对称性，根据函数$f(x)$的性质，再研究$\frac{19}{10},\tan\frac{1}{10},\ln\frac{11}{10}$与对称轴$x=1$的距离即可求解.

【详解】由题意：$f(x)=\log_2(4^x+4)-x-1=\log_2(4^x+4)-\log_2 2^{x+1}=\log_2\frac{4^x+4}{2^{x+1}}=\log_2\left(\frac{2^x}{2}+\frac{2}{2^x}\right)$，

$f(1+x)=\log_2\left(\frac{2^{x+1}}{2}+\frac{2}{2^{x+1}}\right)=\log_2(2^x+2^{-x}),f(1-x)=\log_2\left(\frac{2^{1-x}}{2}+\frac{2}{2^{1-x}}\right)=\log_2(2^{-x}+2^x)$，

$\because f(1+x)=f(1-x),\therefore x=1$是$f(x)$的对称轴；

设$x_1,x_2\in(1,+\infty)$，$g(x)=\frac{2^x}{2}+\frac{2}{2^x}$，并且$x_2>x_1$，　则

$g(x_2)-g(x_1)=\frac{2^{x_2}}{2}+\frac{2}{2^{x_2}}-\frac{2^{x_1}}{2}-\frac{2}{2^{x_1}}=(2^{x_2}-2^{x_1})\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2^{x_1+x_2}}\right)$，显然$y=2^x$是增函数，$x_1+x_2>2$，

$\therefore 2^{x_1+x_2}>4$，$2^{x_2}>2^{x_1}$，$\therefore g(x_2)-g(x_1)>0$，即当$x>1$时，$g(x)$是增函数，$f(x)=\log_2 g(x)$，根据复合函数单调性规则：同增异减，$f(x)$在$x>1$时是增函数，

根据对称性，当$x<1$时，$f(x)$是减函数；

下面分析自变量$x=\frac{19}{10},\tan\frac{1}{10},\ln\frac{11}{10}$时与$x=1$的距离，显然距离越大，对应的函数值越大，

$\left|\frac{19}{10}-1\right|=\frac{9}{10}$;

设 $h(x)=\tan x-x$ ，则 $h'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\geq 0$ ，$\therefore h(x)$ 是增函数，又 $h(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，

$h(x)>0$，即 $\tan x>x$，$\therefore \frac{1}{10}<\tan\frac{1}{10}<\tan\frac{\pi}{4}=1$，

$\therefore \left|1-\tan\frac{1}{10}\right|<\frac{9}{10}$;

设 $p(x)=\ln(x+1)-x$，则 $p'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$，当 $x\geq 0$ 时，$p(x)$ 是减函数，又 $p(0)=0$，所以 $x>0$ 时，

$p(x)<0$，

即 $\ln(x+1)<x$，$\therefore \ln\frac{11}{10}=\ln\left(\frac{1}{10}+1\right)<\frac{1}{10}$，又 $\frac{11}{10}>1,\therefore \ln\left(\frac{11}{10}\right)>0$，$\therefore 1>\left|1-\ln\frac{11}{10}\right|>\frac{9}{10}$;

$\therefore c>a>b$;

故选：C.

【点睛】本题难度较大，分析问题的出发点是函数 $f(x)$ 的图像，然后要运用缩放法对自变量 x 与对称轴 $x=1$ 的距离做出比较，其中 $h(x),p(x)$ 是对正切函数和对数函数的一个常用的缩放，需要掌握.

9.（2023·山西运城·山西省运城中学校校考二模）已知函数 $f(x)=\ln\left(e^{2x}+e^2\right)-x$，若 $a=f\left(e^{\frac{1}{3}}\right),b=f\left(\frac{1}{3}\right),c=f\left(\frac{4}{3}\right)$，则（　）

A．$a>b>c$　　　　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　　　　D．$c>b>a$

【答案】B

【分析】利用导数得 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，由 $e^{\frac{1}{3}}>\frac{4}{3}>1$ 可得 $a>c$，利用 $f(2-x)-f(x)=0$ 恒成立，得 $f(\frac{1}{3})=f(\frac{5}{3})$，再根据 $\frac{5}{3}>e^{\frac{1}{3}}>1$ 可得 $b>a$.

【详解】$f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=\frac{1}{e^{2x}+e^2}\cdot 2e^{2x}-1=\frac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^2}$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<1$，令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

因为 $1<\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<\frac{5}{2}<e$，所以 $e^{\frac{1}{3}}>\frac{4}{3}>1$，所以 $f(e^{\frac{1}{3}})>f(\frac{4}{3})$，即 $a>c$.

因为 $f(2-x)-f(x)=\ln\left[e^{2(2-x)}+e^2\right]-(2-x)-\ln\left(e^{2x}+e^2\right)+x$

$=\ln\frac{e^{4-2x}+e^2}{e^{2x}+e^2}+2x-2=\ln\frac{e^{2-2x}(e^{2x}+e^2)}{e^{2x}+e^2}+2x-2=\ln e^{2-2x}+2x-2=2-2x+2x-2=0$，

所以 $f(2-x)=f(x)$，

所以 $f(\frac{1}{3})=f(2-\frac{1}{3})=f(\frac{5}{3})$，

因为 $(\frac{5}{3})^3=\frac{125}{27}>e$，所以 $\frac{5}{3}>e^{\frac{1}{3}}>1$，

又因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(\frac{5}{3})>f(e^{\frac{1}{3}})$，即 $f(\frac{1}{3})=f(\frac{5}{3})>f(e^{\frac{1}{3}})$，

所以 $b>a$，

综上所述：$b>a>c$.

故选：B

【点睛】关键点点睛：推出 $f(2-x)=f(x)$ 恒成立，得 $f(\frac{1}{3})=f(\frac{5}{3})$ 是解题关键.

10．（2023·河北沧州·校考模拟预测）已知直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^x+2$ 和曲线 $y=\ln\left(e^2x\right)$ 均相切，则实数 k 的解的个数为（　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．无数

【答案】C

【分析】由题意可求得直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^x+2$ 和曲线 $y=\ln\left(e^2x\right)$ 分别切于点 $A\left(\ln k,k+2\right)$，$B\left(\frac{1}{k},\ln\frac{1}{k}+2\right)(k>0)$，则 $k=\frac{k+\ln k}{\ln k-\frac{1}{k}}$，化简后得 $k\ln k-\ln k-k-1=0$，然后将问题转化为方程 $k\ln k-\ln k-k-1=0$ 解的个数，构造函数 $g\left(k\right)=k\ln k-\ln k-k-1\left(k>0\right)$，利用导数和零点存在性定理可求得其零点的个数，从而可得答案.

【详解】根据题意可知，直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^x+2$ 和曲线 $y=\ln\left(e^2x\right)$ 都相切，

所以对于曲线 $y=e^x+2$，则 $y'=e^x=k$，所以 $x=\ln k$，

所以切点 $A\left(\ln k,k+2\right)$，

对于曲线 $y=\ln\left(e^2x\right)$，则 $y'=\frac{1}{x}=k\left(x>0\right)$，所以 $x=\frac{1}{k}$，

切点 $B\left(\frac{1}{k},\ln\frac{1}{k}+2\right)(k>0)$，易知 A,B 不重合，

因为公切线过 A,B 两点，所以 $k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{k-\ln\frac{1}{k}}{\ln k-\frac{1}{k}}=\frac{k+\ln k}{\ln k-\frac{1}{k}}$，

进而可得$k\ln k-\ln k-k-1=0$，

令$g(k)=k\ln k-\ln k-k-1(k>0)$，则$g'(k)=\ln k-\dfrac{1}{k}(k>0)$，

令$\varphi(k)=g'(k)=\ln k-\dfrac{1}{k}(k>0)$，则$\varphi'(k)=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k^2}>0(k>0)$

所以$g'(k)$在$(0,+\infty)$单调递增，

因为$g'(1)=-1<0,g'(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，

所以存在k_0使得$\ln k_0-\dfrac{1}{k_0}=0$，即$\ln k_0=\dfrac{1}{k_0}$，

所以当$0<k<k_0$时，$g'(k)<0$，当$k>k_0$时，$g'(k)>0$，

所以$g(k)$在$(0,k_0)$上单调递减，在$(k_0,+\infty)$上单调递增，$k_0\in(1,\mathrm{e})$，

故$g(k)_{\min}=g(k_0)=k_0\ln k_0-\ln k_0-k_0-1$.

又因为$\ln k_0=\dfrac{1}{k_0}$，

所以$g(k)_{\min}=k_0\cdot\dfrac{1}{k_0}-\dfrac{1}{k_0}-k_0-1=-\dfrac{1}{k_0}-k_0<0$，

当$k=e^2$时，$g(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2\ln\mathrm{e}^2-\ln\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2-1=\mathrm{e}^2-3>0$，

因为$k_0\in(1,\mathrm{e}),g(k_0)g(\mathrm{e}^2)<0$，

所以在(k_0,e^2)内存在k_1，使得$g(k_1)=0$，

当$k=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$时，$g(k)=g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-1=-\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}+1>0$，

因为$k_0\in(1,\mathrm{e})$，$g(k_0)g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$，

所以在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},k_0\right)$内存在$k_2$，使得$g(k_2)=0$，

综上所述，存在两条斜率分别为k_1，k_2的直线与曲线$y=\mathrm{e}^x+2$和曲线$y=\ln(\mathrm{e}^2x)$都相切，

故选：C.

【点睛】关键点点睛：此题考查导数的综合应用，考查导数几何意义，考查利用导数解决函数零点问题，解题的关键是求出两切点的坐标后，将问题转化为方程$k\ln k-\ln k-k-1=0$解的个数问题，然后构造函数，利用导数和零点存在性定理解决，考查数学转化思想和计算能力，属于难题.

二、多选题

11．（2023·湖北武汉·华中师大一附中校考模拟预测）已知函数$y=f\left(x\right)$和$y=g\left(x\right)$的图像都是R上连续不断的曲线，如果$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$，当且仅当$x=1$时$f\left(1\right)=g\left(1\right)=1$，那么下列情形可能出现的是（　）

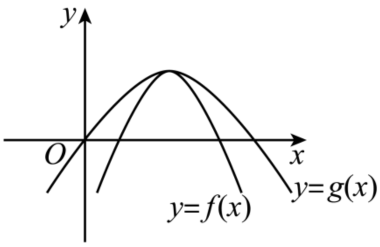
A．1是$f\left(x\right)$的极大值，也是$g\left(x\right)$的极大值　B．1是$f\left(x\right)$的极大值，也是$g\left(x\right)$的极小值

C．1是$f\left(x\right)$的极小值，也是$g\left(x\right)$的极小值　D．1是$f\left(x\right)$的极小值，也是$g\left(x\right)$的极大值

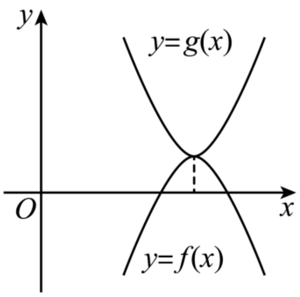
【答案】ABC

【分析】由题意构造函数图象满足题干依次判定选项即可.

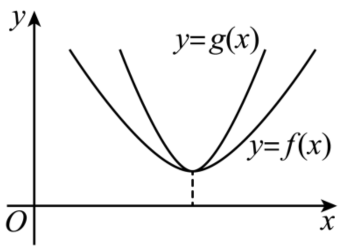
【详解】对于A选项，构造如图所示图象，则A选项正确；



对于B选项，构造如图所示图象，则B选项正确；



对于C选项，构造如图所示图象，则C选项正确；



对于D选项，因为1是$f\left(x\right)$的极小值，则在1的附近存在x_1，使得$f\left(x_1\right)>f\left(1\right)$，

又1也是$g\left(x\right)$的极大值，则在1的附近存在x_2，使得$g\left(1\right)>g\left(x_2\right)$，

所以在1的附近存在x_1与x_2，使得$f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$，不合题意，故D错误.

故选：ABC.

12．（2023·广东深圳·深圳市高级中学校考模拟预测）对于函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$，设

$x_1 \in \{x| f(x)=0\}, x_2 \in \{x| g(x)=0\}$，若存在 x_1, x_2，使得 $|x_1 - x_2| \le 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为“零点相邻函数”.

若函数 $f(x)=e^{x-3}+x-4$ 与 $g(x)=\ln x - mx$ 互为“零点相邻函数”，则实数 m 的值可以是（　　）

A．$\frac{\ln 5}{5}$　　B．$\frac{\ln 3}{3}$　　C．$\frac{\ln 2}{2}$　　D．$\frac{1}{e}$

【答案】BCD

【分析】根据零点的定义求函数 $f(x)$ 的零点 x_1，由定义可得函数 $g(x)$ 的零点 x_2 的范围，结合函数解析式，转化为含参方程有解问题，求导，可得答案.

【详解】由题意，可得 $f(x_1)=e^{x_1-3}+x_1-4=0$，$g(x_2)=\ln x_2 - mx_2 = 0$，

易知 $x_1=3$，则 $|3-x_2| \le 1$，$2 \le x_2 \le 4$，

则 $m=\frac{\ln x_2}{x_2}$ 在 $2 \le x_2 \le 4$ 有解，

求导得：$m'=\frac{1-\ln x_2}{{x_2}^2}$，令 $m'=0$，解得 $x_2=e$，可得下表：

x_2	$(2,e)$	e	$(e,4)$
m'	+	0	–
m	Z	极大值	]

则当 $x_2=e$ 时，m 取得最大值为 $\frac{1}{e}$，

$x_2=2, m=\frac{\ln 2}{2}$，$x_2=4, m=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

则 m 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e}\right]$，

设 $y=\frac{\ln x}{x}$，$x>e$，则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，

所以函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{\ln 5}{5}<\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}<\frac{1}{e}$，

所以 m 的值可以是 $\frac{\ln 2}{2}$，$\frac{\ln 3}{3}$，$\frac{1}{e}$.

故选：BCD.

【点睛】“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.

13.（2023·广东·校联考模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-1}+\ln x$，则过点 $\left(a,b\right)\left(a>0\right)$ 恰能作曲线 $y=f\left(x\right)$ 的两条切线的充分条件可以是（　）

A．$b=2a-1<1$　　　　B．$b=2a-1>1$

C．$f\left(a\right)<2a-1<1$　　　　D．$2a-1>f\left(a\right)>1$

【答案】AB

【分析】设切点坐标为 $(x_0,\mathrm{e}^{x_0-1}+\ln x_0)$，则有 $\mathrm{e}^{x_0-1}+\ln x_0-b=(\mathrm{e}^{x_0-1}+\frac{1}{x_0})(x_0-a)$，所以问题转化为方程 $\mathrm{e}^{x_0-1}(x_0-a-1)-\ln x_0+b+1-\frac{a}{x_0}=0(x_0>0)$ 恰有两个解，令 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}(x-a-1)-\ln x+b+1-\frac{a}{x}(x>0)$，然后利用导数求解其零点即可.

【详解】由 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-1}+\ln x$，得 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x}(x>0)$，

设切点为 $(x_0,\mathrm{e}^{x_0-1}+\ln x_0)$，则切线的斜率为 $k=\mathrm{e}^{x_0-1}+\frac{1}{x_0}$，

所以有 $\mathrm{e}^{x_0-1}+\ln x_0-b=(\mathrm{e}^{x_0-1}+\frac{1}{x_0})(x_0-a)$，

整理可得：$\mathrm{e}^{x_0-1}(x_0-a-1)-\ln x_0+b+1-\frac{a}{x_0}=0(x_0>0)$，

由题意可知：此方程有且恰有两个解，令 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}(x-a-1)-\ln x+b+1-\frac{a}{x}(x>0)$，

$g\left(1\right)=b+1-2a;x\to 0,g\left(x\right)\to -\infty;x\to +\infty,g\left(x\right)\to -\infty;$，

$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}(x-a)-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=(x-a)(\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x^2})(x>0)$，

令 $F(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x^2}(x>0)$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\frac{2}{x^3}>0(x>0)$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $F(1)=\mathrm{e}^{1-1}-1=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，

1当 $-1<2a-1<1$，即 $0<a<1$ 时，

当 $0<x<a$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 单调递增，

当 $a<x<1$ 时，$g'\left(x\right)\langle 0,g\left(a\right)\rangle g\left(1\right),b-f\left(a\right)>b-\left(2a-1\right),f\left(a\right)<2a-1$，函数 $g(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时， $g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 单调递增，

所以只要 $g(a)=0$ 或 $g(1)=0$，即 $b=\mathrm{e}^{a-1}+\ln a=f\left(a\right)$ 或 $b=2a-1\in(-1,1)$；

②当 $2a-1>1$，即 $a>1$ 时，

当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，则函数$g(x)$单调递增，

当$1<x<a$时，$g'(x)\langle 0,g(1)\rangle g(a),f(a)>2a-1,$函数$g(x)$单调递减，

当$x>a$时，$g'(x)>0$，则函数$g(x)$单调递增，

当$x=a$时，$g(a)=b-e^{a-1}-\ln a$，

所以只要$g(1)=0$或$g(a)=0$，由$g(1)=0$可得：$b=2a-1>1$，

由$g(a)=0$得$b=e^{a-1}+\ln a=f(a)$；

③当$a=1$时，$g'(x)=(x-1)(e^{x-1}-\frac{1}{x^2})>0$，所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以函数至多有一个零点，不合题意；

综上：当$0<a<1$时，$b=f(a)<2a-1<1$或$b=2a-1<1$；

当$a>1$时，$b=2a-1>1$或$b=f(a)>2a-1>1$，

所以选项 A 正确，B 正确，C 错误，D 错误，

故选：AB

【点睛】关键点睛：解题的关键是根据题意将问题转化为方程$e^{x_0-1}(x_0-a-1)-\ln x_0+b+1-\frac{a}{x_0}=0(x_0>0)$恰有两个解，构造函数$g(x)=e^{x-1}(x-a-1)-\ln x+b+1-\frac{a}{x}(x>0)$，再次将问题转化为此函数有两个零点，然后利用导数通过分析其单调性可求得结果.

14.（2023·山东泰安·校考模拟预测）已知函数$f(x)=\ln x-a(x^3-x^2)$，若不等式$f(x)>0$有且只有三个整数解，则实数a的取值可以为（　）

A．$\frac{\ln 5}{100}$　　B．$\frac{\ln 2}{25}$　　C．$\frac{\ln 2}{24}$　　D．$\frac{\ln 5}{24}$

【答案】AB

【分析】依题意可得不等式$\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$有且只有三个整数解，令$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，利用导数判断函数的单调性，再由$g(1)=0$且函数$y=a(x-1)\ (x>0)$的图象恒过点$(1,0)$，作出两函数的图象，依题意可得$\begin{cases}(4-1)a<g(4)\\(5-1)a\geq g(5)\end{cases}$，即可求出参数的取值范围.

【详解】因为$f(x)=\ln x-a(x^3-x^2)$定义域为$(0,+\infty)$，由$f(x)>0$，

可得$\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$，

即不等式$\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$有且只有三个整数解，

令$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则$g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^2}$，所以当$0<x<\sqrt{e}$时$g'(x)>0$，

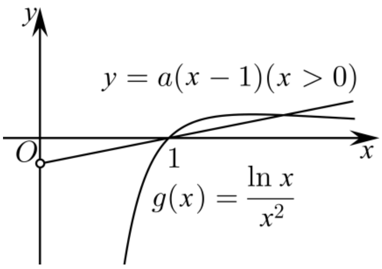
当$x>\sqrt{e}$时$g'(x)<0$，则$g(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，

又$g(1)=0$，

所以当$0<x<1$时$g(x)<0$，当$x>1$时$g(x)>0$，

易知函数$y=a(x-1)$ $(x>0)$的图象恒过点$(1,0)$，

在同一平面直角坐标系中作出$y=a(x-1)$ $(x>0)$与$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$的图象如下图所示：



由题意及图象可知$a>0$，要使不等式$\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$有且只有三个整数解，

则$\begin{cases}(4-1)a<g(4)\\(5-1)a\geq g(5)\end{cases}$，即$\begin{cases}3a<\frac{\ln 4}{16}\\4a\geq\frac{\ln 5}{25}\end{cases}$，解得$\frac{\ln 5}{100}\leq a<\frac{\ln 2}{24}$，

故符合题意的有 A、B.

故选：AB

【点睛】关键点睛：本题解答的关键是转化为不等式$\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$有且只有三个整数解，利用导数得到函数的单调性，再数形结合得到不等式组.

15．（2023·福建福州·福建省福州第一中学校考三模）定义在R上的函数$f(x)$，$g(x)$的导函数为$f'(x)$，$g'(x)$，$y=f(x+1)$是偶函数.已知$2f(x-1)-g(x)=8$，$f'(x)-g'(1-x)=0$，则（　）

A．$y=f'(x)$是奇函数　　B．$y=g(x)$图象的对称轴是直线$x=2$

C．$f'(3)=0$　　D．$\sum_{n=1}^{2013}\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cdot g'(n)\right]=1$

【答案】ABC

【分析】对于 A，利用题中条件解出$f'(x)=g'(x+1)-g'(1-x)$，利用奇函数得定义即可；