2023年高考数学模拟试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y-1\le 0\\ x-y+3\le 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$，则$x^2+y^2$的最大值是（　　）

A．$\frac{9}{2}$　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　C．13　D．$\sqrt{13}$

2．已知复数z满足$i\cdot z=3+2i$（i是虚数单位），则$\overline{z}=$（　　）

A．$2+3i$　B．$2-3i$　C．$-2+3i$　D．$-2-3i$

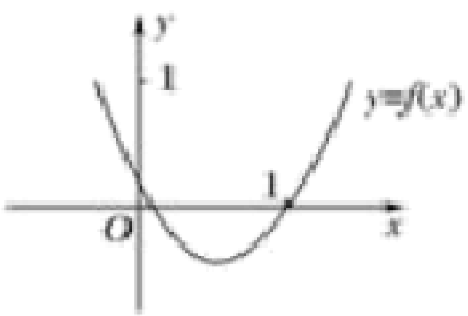
3．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点与圆$M$：$(x-2)^2+y^2=5$的圆心重合，且圆$M$被双曲线的一条渐近线截得的弦长为$2\sqrt{2}$，则双曲线的离心率为（　　）

A．2　B．$\sqrt{2}$　C．$\sqrt{3}$　D．3

4．在边长为2的菱形$ABCD$中，$BD=2\sqrt{3}$，将菱形$ABCD$沿对角线AC对折，使二面角$B-AC-D$的余弦值为$\frac{1}{3}$，则所得三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为（　　）

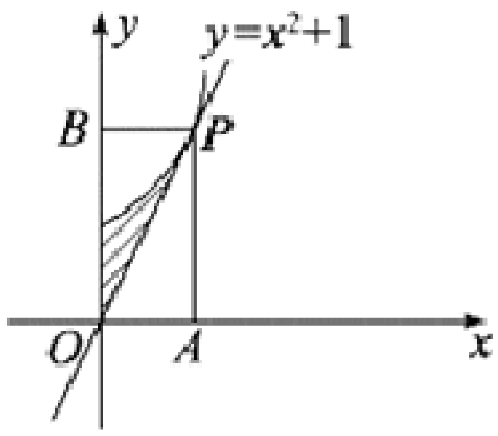
A．$\frac{2\pi}{3}$　B．2π　C．4π　D．6π

5．已知二次函数$f(x)=x^2-bx+a$的部分图象如图所示，则函数$g(x)=e^x+f'(x)$的零点所在区间为（　　）



A．$(-1,0)$　B．$(0,1)$　C．$(1,2)$　D．$(2,3)$

6．如图在直角坐标系xOy中，过原点O作曲线$y=x^2+1(x\ge 0)$的切线，切点为P，过点P分别作x、y轴的垂线，垂足分别为A、B，在矩形$OAPB$中随机选取一点，则它在阴影部分的概率为（　　）



A．$\frac{1}{6}$　B．$\frac{1}{5}$　C．$\frac{1}{4}$　D．$\frac{1}{2}$

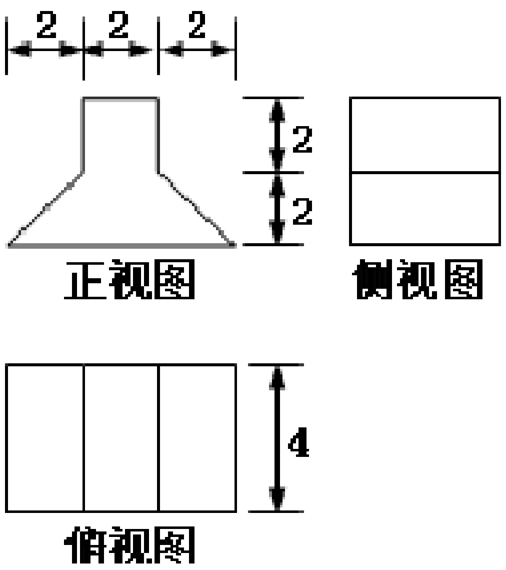
7．关于圆周率 π，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的浦丰实验和查理斯实验．受其启发，我们也可以通过设计下面的实验来估计π的值：先请全校m名同学每人随机写下一个都小于1的正实数对(x, y)；再统计两数能与1构成钝角三角形三边的数对(x, y)的个数a；最后再根据统计数a估计π的值，那么可以估计π的值约为（　　）

A．$\frac{4a}{m}$　B．$\frac{a+2}{m}$　C．$\frac{a+2m}{m}$　D．$\frac{4a+2m}{m}$

8．已知圆$M{:}x^2+y^2-2ay=0(a>0)$截直线$x+y=0$所得线段的长度是$2\sqrt{2}$，则圆M与圆$N{:}(x-1)^2+(y-1)^2=1$的位置关系是（　　）

A．内切 B．相交 C．外切 D．相离

9．若某几何体的三视图（单位:cm）如图所示，则此几何体的体积是（　　）

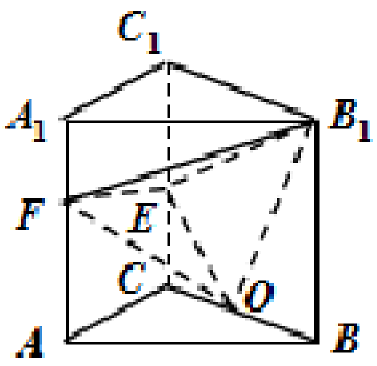


A．36 cm3　B．48 cm3　C．60 cm3　D．72 cm3

10．一个盒子里有 4 个分别标有号码为 1，2，3，4 的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取 3 次，则取得小球标号最大值是 4 的取法有（　　）

A．17 种B．27 种C．37 种D．47 种

11．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=1$，$BC=AA_1=\sqrt{2}$，点E, O分别是线段C_1C, BC的中点，$\overrightarrow{A_1F}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A}$，分别记二面角$F-OB_1-E$，$F-OE-B_1$，$F-EB_1-O$的平面角为$\alpha, \beta, \gamma$，则下列结论正确的是（　　）



A．$\gamma>\beta>\alpha$　B．$\alpha>\beta>\gamma$　C．$\alpha>\gamma>\beta$　D．$\gamma>\alpha>\beta$

12．设$a\in R$，$b>0$，则“$3^a>2b$”是“$a>\log_3 b$”的

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设函数$f\left(x\right)=\left|\ln x+a\right|+\left|x+b\right|\left(a,b\in R\right)$，当$x\in\left[1,e\right]$时，记$f\left(x\right)$最大值为$M\left(a,b\right)$，则$M\left(a,b\right)$的最小值为______.

14．已知函数$f(x)=-x^3+x+a,x\in[\frac{1}{e},e]$与$g(x)=3lnx-x-1$的图象上存在关于$x$轴对称的点，则$a$的取值范围为_____.

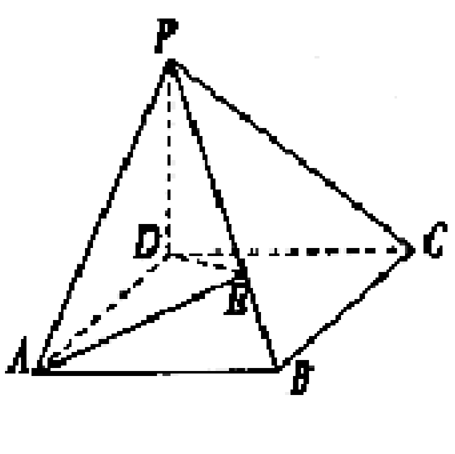
15．某中学数学竞赛培训班共有 10 人，分为甲、乙两个小组，在一次阶段测试中两个小组成绩的茎叶图如图所示，若甲组 5 名同学成绩的平均数为 81，乙组 5 名同学成绩的中位数为 73，则 x- y 的值为________.

甲		乙
	6	7
7　2	7	0　y
6　x	8	5
0	9	1

16．在平面直角坐标系xOy中，点A的坐标为$\left(0,5\right)$，点B是直线l：$y=\frac{1}{2}x$上位于第一象限内的一点．已知以AB为直径的圆被直线l所截得的弦长为$2\sqrt{5}$，则点B的坐标__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图在棱锥$P-ABCD$中，$ABCD$为矩形，$PD\perp$面$ABCD$，$PB=2,\angle BPC=45^{\circ},\angle PBD=30^{\circ}$.



（1）在PB上是否存在一点E，使$PC\perp$面ADE，若存在确定E点位置，若不存在，请说明理由；

（2）当 E 为 PB 中点时，求二面角 $P-AE-D$ 的余弦值.

18．（12 分）已知顶点是坐标原点的抛物线 Γ 的焦点 F 在 y 轴正半轴上，圆心在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上的圆 E 与 x 轴相切，且 E，F 关于点 $M(-1,0)$ 对称.

（1）求 E 和 Γ 的标准方程；

（2）过点 M 的直线 l 与 E 交于 A，B，与 Γ 交于 C，D，求证：$|CD|>\sqrt{2}|AB|$.

19．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{5}$.

（1）求直线 l 的直角坐标方程；

（2）若点 P 在曲线 C 上，点 Q 在直线 l 上，求 $|PQ|$ 的最小值.

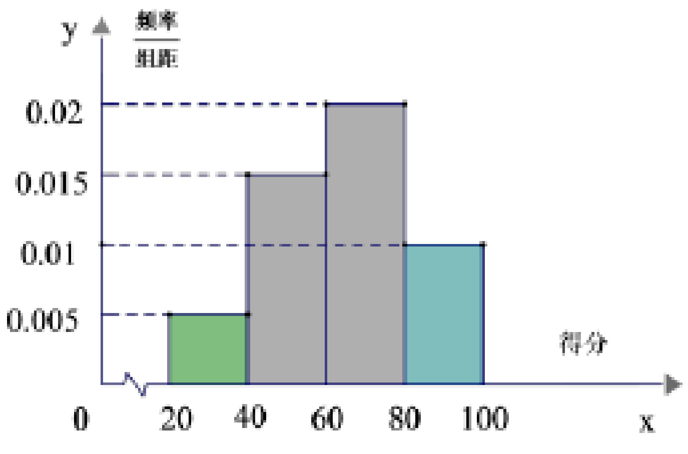
20．（12 分）设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，且 $a_3=2$，$S_9=54$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\sqrt{\frac{1}{a_1+3}}+\sqrt{\frac{1}{a_2+3}}+\sqrt{\frac{1}{a_3+3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}}>13$.

21．（12 分）某校为了解校园安全教育系列活动的成效，对全校学生进行一次安全意识测试，根据测试成绩评定“合格”、“不合格”两个等级，同时对相应等级进行量化：“合格”记 5 分，“不合格”记 0 分.现随机抽取部分学生的成绩，统计结果及对应的频率分布直方图如下所示：

等级	不合格		合格	
得分	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100)$
频数	6	x	24	y



（Ⅰ）若测试的同学中，分数段$[20,40)$、$[40,60)$、$[60,80)$、$[80,100]$内女生的人数分别为$2人、8人、16人、4人$，完成2×2列联表，并判断：是否有90%以上的把握认为性别与安全意识有关？

是否合格 性别	不合格	合格	总计
男生			
女生			
总计			

（Ⅱ）用分层抽样的方法，从评定等级为“合格”和“不合格”的学生中，共选取10人进行座谈，现再从这10人中任选4人，记所选4人的量化总分为X，求X的分布列及数学期望$E(X)$；

(Ⅲ)某评估机构以指标M（$M=\dfrac{E(X)}{D(X)}$，其中$D(X)$表示X的方差）来评估该校安全教育活动的成效，若$M\geq 0.7$，则认定教育活动是有效的；否则认定教育活动无效，应调整安全教育方案.在（Ⅱ）的条件下，判断该校是否应调整安全教育方案？

附表及公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

22.（10分）已知函数$f\left(x\right)=|x|+|x-a|$.

（1）当$a=2$时，求不等式$f\left(x\right)<4$的解集；

（2）若$f\left(x\right)\geq 1$对任意$x\in\mathbf{R}$成立，求实数a的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

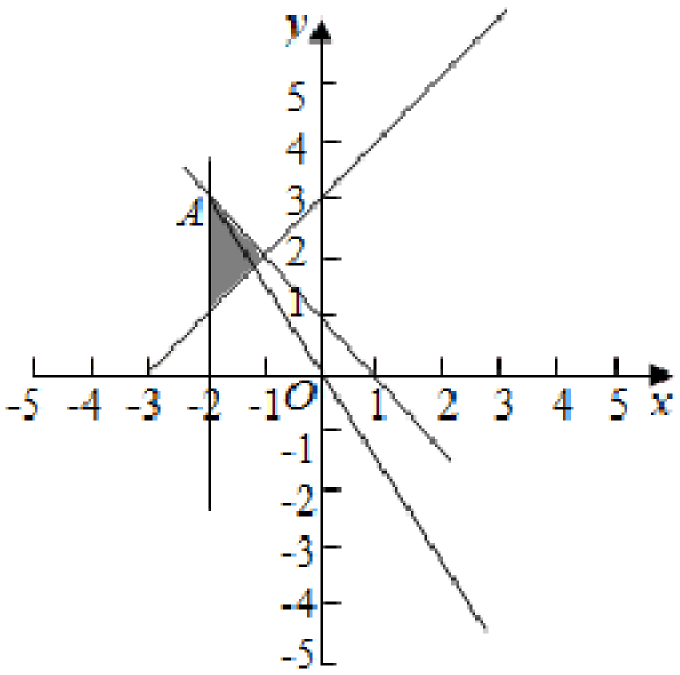
1、C

【解析】

由已知画出可行域，利用目标函数的几何意义求最大值.

【详解】

解：x^2+y^2表示可行域内的点(x,y)到坐标原点的距离的平方，画出不等式组表示的可行域，如图，由$\begin{cases}x+y-1=0\\x+2=0\end{cases}$解得$\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$即$A(-2,3)$



点$A(-2,3)$到坐标原点$(0,0)$的距离最大，即$(x^2+y^2)_{max}=(-2)^2+3^2=13$.

故选：C.

【点睛】

本题考查线性规划问题，考查数形结合的数学思想以及运算求解能力，属于基础题.

2、A

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

解：由$i\cdot z=3+2i$，得$z=\dfrac{3+2i}{i}=\dfrac{(3+2i)(-i)}{-i^2}=2-3i$，

$\therefore\ \overline{z}=2+3i$.

故选A.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

3、A

【解析】

由已知，圆心M到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，可得$\sqrt{3}=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，又$c=2=a^2+b^2$，解方程即可.

【详解】

由已知，$c=2$，渐近线方程为$bx\pm ay=0$，因为圆M被双曲线的一条渐近线截得的弦长为$2\sqrt{2}$，

所以圆心M到渐近线的距离为$\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2b}{c}=b$，故$a=\sqrt{c^2-b^2}=1$，

所以离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线离心率的问题，涉及到直线与圆的位置关系，考查学生的运算能力，是一道容易题.

4、D

【解析】

取 AC 中点 N，由题意得$\angle BND$ 即为二面角$B-AC-D$的平面角，过点 B 作$BO\perp DN$于 O，易得点 O 为$\triangle ADC$的中心，则三棱锥$A-BCD$的外接球球心在直线 BO 上，设球心为O_1，半径为r，列出方程$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-r\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=r^2$即可得解.

【详解】

如图，由题意易知$\triangle ABC$ 与$\triangle ADC$ 均为正三角形，取 AC 中点 N，连接 BN，DN，

则$BN\perp AC$，$DN\perp AC$，$\therefore\angle BND$ 即为二面角$B-AC-D$的平面角，

过点 B 作$BO\perp DN$于 O，则$BO\perp$平面 ACD，

由$BN=ND=\sqrt{3}$，$\cos\angle BND=\frac{1}{3}$可得$ON=BN\cdot\cos\angle BND=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$OB=\sqrt{3-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore ON=\frac{1}{3}ND$ 即点 O 为$\triangle ADC$ 的中心，

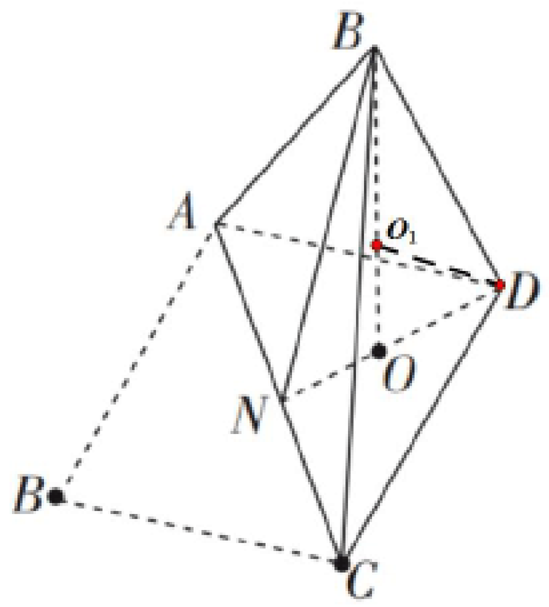
$\therefore$三棱锥$A-BCD$的外接球球心在直线 BO 上，设球心为O_1，半径为r，

$\therefore BO_1=DO_1=r$，$OO_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}-r$，

$\therefore\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-r\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=r^2$解得$r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$三棱锥$A-BCD$的外接球的表面积为$S=4\pi r^2=4\pi\times\frac{3}{2}=6\pi$.

故选：D.



【点睛】
本题考查了立体图形外接球表面积的求解，考查了空间想象能力，属于中档题.
5、B
【解析】
由函数 f(x)的图象可知，0＜f(0)＝a＜1，f(1)＝1－b＋a＝0，所以 1＜b＜2.
又 f'(x)＝2x－b，所以 g(x)＝ex＋2x－b，所以 g′(x)＝ex＋2＞0，所以 g(x)在 R 上单调递增，
又 g(0)＝1－b＜0，g(1)＝e＋2－b＞0，
根据函数的零点存在性定理可知，函数 g(x)的零点所在的区间是(0，1)，
故选 B.
6、A
【解析】
设所求切线的方程为 $y=kx$，联立 $\begin{cases} y=kx\left(k>0\right) \\ y=x^2+1 \end{cases}$，消去 y 得出关于 x 的方程，可得出 $\Delta=0$，求出 k 的值，进而求得切点 P 的坐标，利用定积分求出阴影部分区域的面积，然后利用几何概型概率公式可求得所求事件的概率.
【详解】
设所求切线的方程为 $y=kx$，则 $k>0$，
联立 $\begin{cases} y=kx\left(k>0\right) \\ y=x^2+1 \end{cases}$，消去 y 得 $x^2-kx+1=0$ ①，由 $\Delta=k^2-4=0$，解得 $k=2$，
方程①为 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，则点 $P\left(1,2\right)$，
所以，阴影部分区域的面积为 $S=\int_0\left(x^2+1-2x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$，
矩形 $OAPB$ 的面积为 $S'=1\times2=2$，因此，所求概率为 $P=\frac{S}{S'}=\frac{1}{6}$.
故选：A.
【点睛】
本题考查定积分的计算以及几何概型，同时也涉及了二次函数的切线方程的求解，考查计算能力，属于中等题.
7、D
【解析】

由试验结果知m对 0～1 之间的均匀随机数x,y，满足$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，面积为 1，再计算构成钝角三角形三边的数对$(x,y)$，满足条件的面积，由几何概型概率计算公式，得出所取的点在圆内的概率是圆的面积比正方形的面积，即可估计π的值．

【详解】

解：根据题意知，m名同学取m对都小于1的正实数对(x,y)，即$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，

对应区域为边长为1的正方形，其面积为1，

若两个正实数x,y能与1构成钝角三角形三边，则有$\begin{cases}x^2+y^2<1\\x+y>1\\0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，

其面积$S=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$；则有$\dfrac{a}{m}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$，解得$\pi=\dfrac{4a+2m}{m}$

故选：D．

【点睛】

本题考查线性规划可行域问题及随机模拟法求圆周率的几何概型应用问题．线性规划可行域是一个封闭的图形，可以直接解出可行域的面积；求解与面积有关的几何概型时，关键是弄清某事件对应的面积，必要时可根据题意构造两个变量，把变量看成点的坐标，找到试验全部结果构成的平面图形，以便求解．

8、B

【解析】

化简圆$M:x^2+(y-a)^2=a^2\Rightarrow M(0,a),r_1=a\Rightarrow M$到直线$x+y=0$的距离$d=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\dfrac{a}{\sqrt{2}})^2+2=a^2\Rightarrow a=2\Rightarrow M(0,2),r_1=2$，

又$N(1,1),r_2=1\Rightarrow|MN|=\sqrt{2}\Rightarrow|r_1-r_2|<|MN|<|r_1+r_2|\Rightarrow$两圆相交．选 B

9、B

【解析】

试题分析：该几何体上面是长方体，下面是四棱柱；长方体的体积$V_1=2\cdot2\cdot4=16$，四棱柱的底面是梯形，体积为$V_2=\dfrac{1}{2}(2+6)\cdot2\cdot4=32$，因此总的体积$V=16+32=48$．

考点：三视图和几何体的体积．

10、C

【解析】

由于是放回抽取,故每次的情况有 4 种,共有 64 种；先找到最大值不是 4 的情况,即三次取出标号均不为 4 的球的情况,进而求解．

【详解】

所有可能的情况有$4^3=64$种,其中最大值不是 4 的情况有$3^3=27$种,所以取得小球标号最大值是 4 的取法有

$64-27=37$ 种,

故选:C

【点睛】

本题考查古典概型,考查补集思想的应用,属于基础题.

11、D

【解析】

过点 C 作 $Cy//AB$，以 C 为原点，CA 为 x 轴，Cy 为 y 轴，CC_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法求解二面角的余弦值得答案.

【详解】

解：因为 $AB=AC=1$，$BC=AA_1=\sqrt{2}$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，即 $AB\perp AC$

过点 C 作 $Cy//AB$，以 C 为原点，CA 为 x 轴，Cy 为 y 轴，CC_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $F(1,0,\frac{2\sqrt{2}}{3})$，$O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$E(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$B_1(1,1,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{OB_1}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OE}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{OF}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2\sqrt{2}}{3})$，$\overrightarrow{EB_1}=(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,\frac{\sqrt{2}}{6})$，

设平面 OB_1E 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\sqrt{2}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{m}=(1,-1,0)$，

同理可求平面 OB_1F 的法向量 $\vec{n}=(-5\sqrt{2},-\sqrt{2},3)$，

平面 OEF 的法向量 $\vec{p}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\sqrt{2}}{2},3)$，平面 EFB_1 的法向量 $\vec{q}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},3)$.

$\therefore \cos\alpha=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{4\sqrt{61}}{61}$，$\cos\beta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{p}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{4\sqrt{34}}{34}$，$\cos\gamma=\frac{\vec{m}\cdot\vec{q}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{\sqrt{46}}{46}$.

$\therefore \gamma>\alpha>\beta$.

故选：D.