第一章　线性规划
(Linear Programming)

- 线性规划问题及其数学模型
- 线性规划图解法
- 线性规划问题解的性质
- 单纯形法
- 单纯形法的其他问题讨论
- 线性规划应用举例
- WinQSB软件应用

第一节 线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题的提出

【例1-1】已知某企业生产资料如下表所示，问如何安排生产才能企业使利润最大?

产 品 资 源	甲	乙	每天可用于产品生产的资源量
设备	1	1	16
材料A	3	2	36
材料B		5	65
利润（元）	90	70	

设甲产品的生产量为x_1, 乙产品的生产量为x_2，则:

数学模型： $\max \quad z = 90x_1 + 70x_2$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \le 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ 5x_2 \le 65 \\ x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

【例1-2】设某种动物每天需要摄入的蛋白质、矿物质、维生素的最低量及A、B、C、D、E五种饲料每公斤营养成分的含量及单位价格如下表所示。要求既满足该种动物每天营养成分的需要量，又使总的费用最省。

	A	B	C	D	E	每天最低摄入量（克）
蛋白质(克)	3	2	1	6	18	700
矿物质(克)	1	0.5	0.2	2	0.5	30
维生素(克)	0.5	1	0.2	2	0.8	100
价格(元/千克)	2	7	4	3	8	

设x_j为第j种饲料的每天使用量，则：

目标函数： $\min \quad z=2x_1+7x_2+4x_3+3x_4+8x_5$

满足约束条件
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ x_3+6x_4+18x_5 \geq 700 \\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5 \geq 30 \\ 0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5 \geq 100 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

二、线性规划问题数学模型的一般形式

线性规划问题数学模型的组成要素：

(1)变量，或称决策变量，它们是问题中所要解决的未知量，表明规划中用数量表示的方案、措施，可由决策者决定和控制；

(2)目标函数，是决策变量的函数，按问题的目标不同分别在这个函数前加上max或min；

(3)约束条件，由一组含决策变量的等式或不等式组成，表明决策变量取值时所受到的各种资源条件的限制。

假定线性规划问题中含有n个决策变量x_j(j＝1，…，n)，在目标函数中x_j的系数为c_j(c_j通常称为价值系数)；有m种资源的限制，每种资源数量用b_i(i=1,...m)表示；用a_{ij}表示变量x_j取值为1个单位时所消耗或含有的第i种资源的数量，通常称a_{ij}为技术系数或消耗系数。

线性规划问题的数学模型的一般形式：

目标函数：$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$ ①

约束条件：
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_2 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_m \\
x_1, x_2, \cdots x_n \ge 0
\end{cases}
$$
② ③

①为目标函数；②为资源约束；③为非负约束。

x_j——决策变量；

c_j——价值系数；

a_{ij}——技术（消耗）系数；

b_i——资源常量，$b_i \geq 0$

线性规划模型的简写形式为：

目标函数： $$\max(\text{或}\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

约束条件：
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le (=、\ge)\, b_i & (i=1\ 2\cdots\ m)\\ x_j\ge 0 & (j=1\ 2\cdots\ n)\end{cases}$$

用向量形式表达时，模型可写为：

$$\max\ (\min)\ \ z\ =\ CX$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le (=\,,\ \ge)\, b\\ x_j \ge 0\end{cases}$$

式中：

$$C=(c_1,\ c_2,\cdots,\ c_n)$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_j=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}$$

矩阵形式为：

$$\max \quad (\text{或} \ \min) \quad z = CX$$

$$\begin{cases} AX \le (\text{或} \ = \cdot \ge)\, b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m2} \end{bmatrix}$$

A为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

三、线性规划问题的标准形式

$$Max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=1,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 & (j=1,\cdots n) \end{cases}$$

化一般形式为标准形式的方法：

1、目标函数为求极小值，即为：$\min z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

因为求Min z，等价于求Max(-z)，令z′=-z，即化为：

$$Max \quad z'=-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

2．右端项$b_i<0$

只需将等式或不等式两端同乘(-1)，则等式右端项必大于零。

3．约束条件为不等式：

当约束条件为“≤”时，需将约束条件左端加松弛变量；当约束条件为“≥”时，需将约束条件左端减去剩余变量。

4．取值无约束的变量

可令x＝x’-x”，其中x’≥0，x”≥0

5．对x≤0的情况

令x’＝-x，显然x’≥0

【例1-3】将下述线性规划化为标准形式

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

解：上述问题中令：

(1) $Z' = -Z$得到 $\max \quad Z' = -Z$

(2) $x_1' = -x_1$

(3) $x_3 = x_3' - x_3''$

(4)在第一个约束条件的左端加入一个松弛变量$x_4\,(x_4 \ge 0)$

(5)在第二个约束条件是左端减去一个剩余变量$x_5\,(x_5 \ge 0)$

(6)将第三个约束条件两端同乘“-1”

该问题的标准形式为：

$$\max z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 4x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

第二节 线性规划图解法

一、图解法步骤

图解法的步骤可概括为：

(一) 建立平面直角坐标系；

(二) 利用约束条件，确定线性规划问题解的可行域；

(三) 绘制目标函数的等值线和法线；

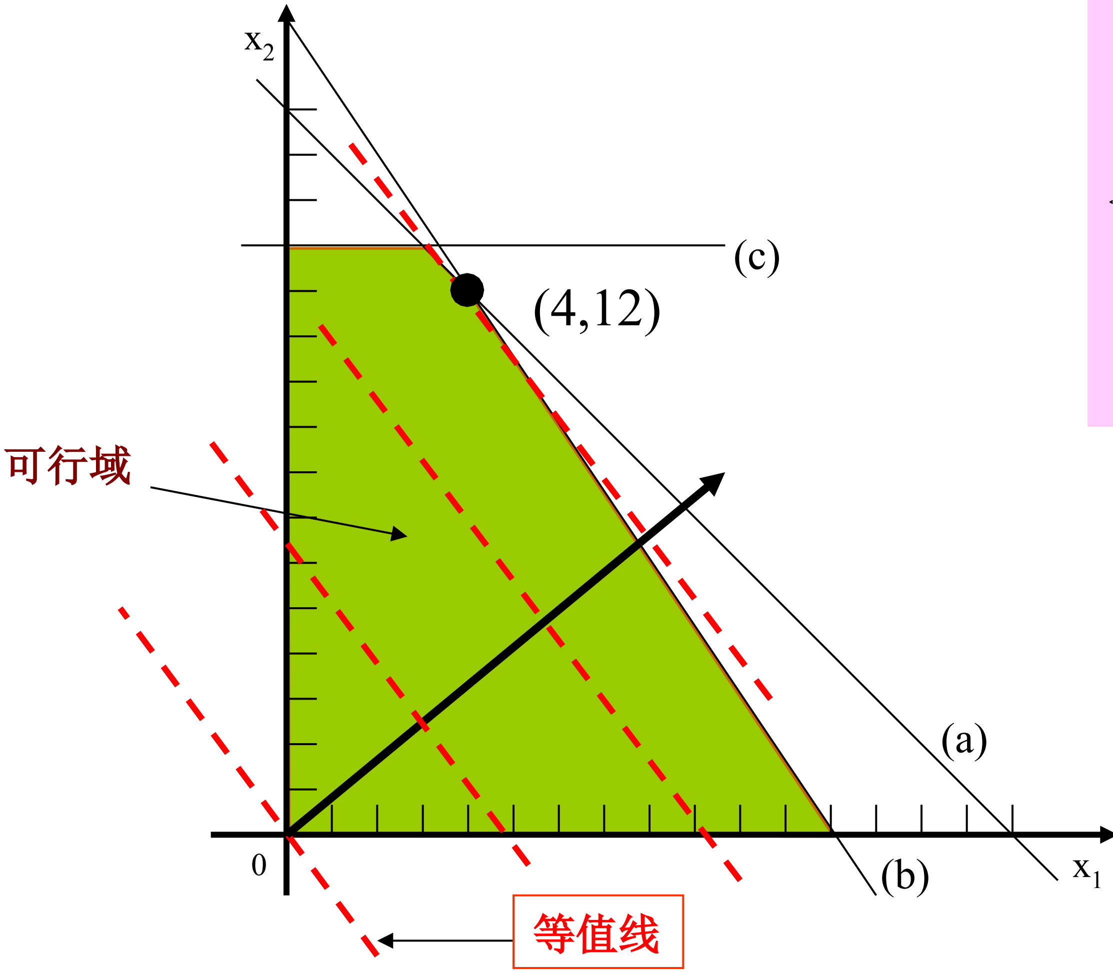
(四) 沿法线方向移动目标函数等值线至可行域的边缘，寻求问题最优解。若该问题存在最优解，则在可行域的边缘得到问题的最优解。

二、图解法举例

【例1-4】用图解法求解下列线性规划问题：

$$\max \quad z = 90x_1 + 70x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \le 16 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 & (b) \\ \qquad\ \ 5x_2 \le 65 & (c) \\ x_1, x_2 \ge 0 & (d) \end{cases}$$



$$\max \quad z = 90x_1 + 70x_2$$

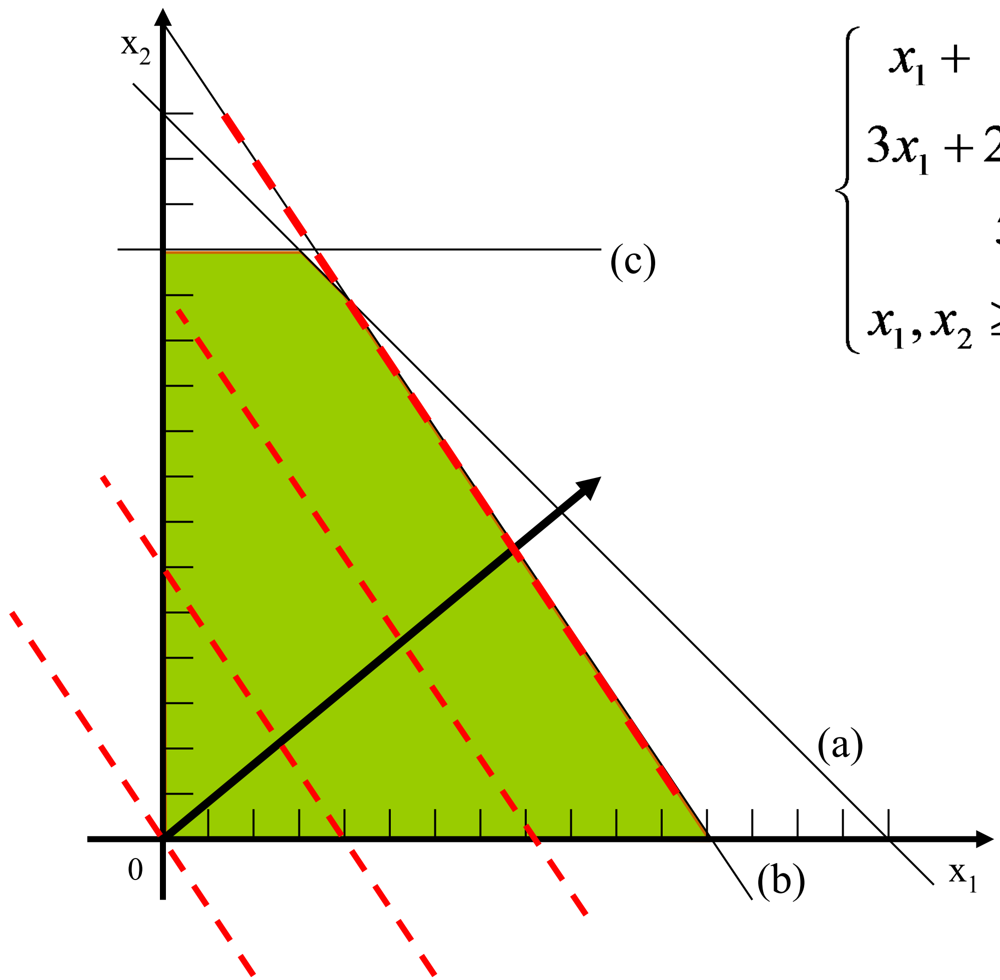
$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 \le 16 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 & (b) \\ \qquad 5x_2 \le 65 & (c) \\ x_1, x_2 \ge 0 & (d) \end{cases}$$

∴ 最优解：$x_1 = 4$，$x_2 = 12$

最优目标函数值：$z = 1200$

三、线性规划问题解的可能结果

（一）无穷多最优解



$$\max \quad z = 90x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 & (b) \\ 5x_2 \le 65 & (c) \\ x_1, x_2 \ge 0 & (d) \end{cases}$$

(二)无界解

$$\max \quad z = 90x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 5x_2 \le 65 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

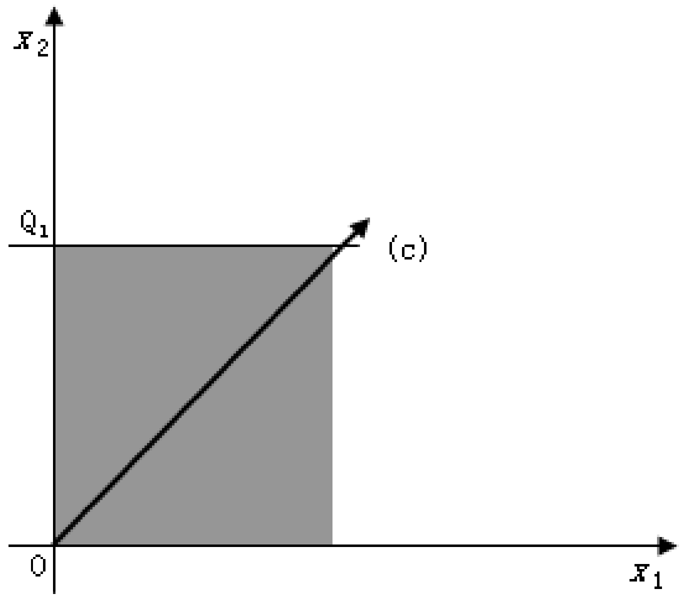


图1-3

(三)无解

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

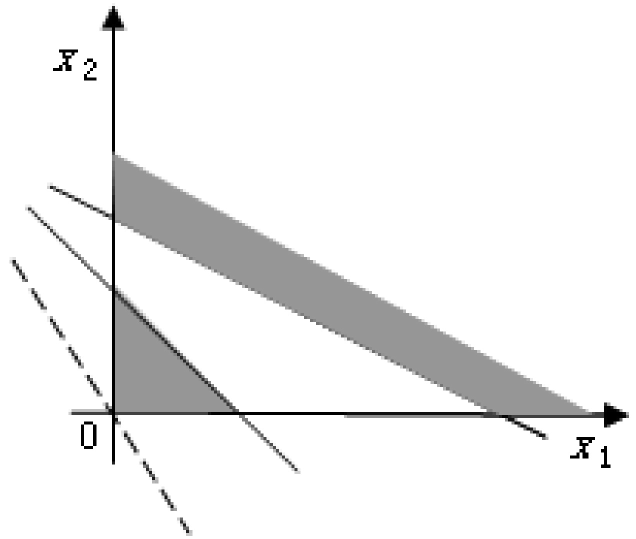


图1-4

第三节 线性规划问题解的性质

一、线性规划问题的解的概念

$$Max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,\cdots,m) & (1.1)\\ x_j\geq 0 & (j=1,\cdots,n) & (1.2)\end{cases}$$

基：若B是矩阵A的m×m阶非奇异子矩阵（$|B|\neq 0$），则称B是线性规划问题的一个基。即矩阵B是由m个线性无关的列向量组成，假设B可以表述为：

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m)$$

基向量：矩阵B中的各个向量$P_i(i=1,2,\cdots,m)$，称为基向量。

非基向量：矩阵A中其余的向量，称为非基向量。

基变量： 与基向量 P_i 对应的决策变量，称为基变量。

$$x_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)$$

非基变量： 与非基向量 P_j 对应的决策变量，称为非基变量。

$$x_j\left(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n\right)$$

可行解： 满足约束条件(1.1)、(1.2)的解 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解： 使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

基解： 对于某个特定的基B，非基变量均取0时的解，称为基解。

基可行解： 满足非负条件（1.2）的基解，称为基可行解。

可行基： 与基可行解相对应的基，称为可行基。

二、线性规划的基本定理

定义1.1 设K是n维欧氏空间的一个点集，若对于K中的任意两点$X_1 \in K$和$X_2 \in K$，均有$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, (0 \le \alpha \le 1)$，则称K为凸集。

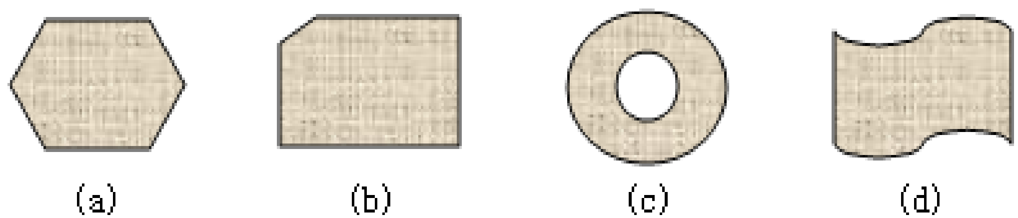


图1-6

定义1.2 设K为凸集，$X \in K$，若X不能用K中任意两点$X_1 \in K$和$X_2 \in K(X_1 \ne X_2)$的线性组合表示为$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, (0 \le \alpha \le 1)$，则称X为凸集K的一个顶点（或称为极点）。

定理1.1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集。

$$R = \{X \mid AX = b, X \ge 0\}$$

定理1.2 线性规划问题的基可行解X对应于可行域R的顶点。

定理1.3 若线性规划问题的可行域非空有界，则线性规划问题的最优解一定可以在其可行域的某个顶点上得到。

第四节 单纯形法

一、单纯形法的求解步骤

基本思路：

先找出一个基可行解，判断其是否为最优解，如果为否，则转换到相邻的基可行解，并使目标函数值不断增大，直到找到最优解为止。

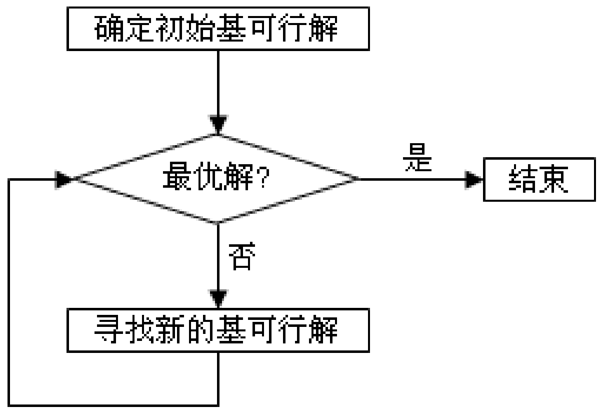


图1-7

1. 确定初始基可行解

对于标准形的线性规划问题：

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b & \qquad\qquad (1.3) \\ x_j \geq 0 \qquad (j=1,\cdots,n) & \qquad\qquad (1.4) \end{cases}$$

约束条件的变量的系数矩阵中总会存在一个单位矩阵：

$$(P_1, P_2, \mathrm{L}\ , P_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{L} & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{L} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 1 \end{bmatrix}$$

$P_1, \mathrm{L}\ , P_m$ 称为基向量，同其对应的变量 $x_1, \mathrm{L}\ , x_m$称为基变量，模型中的其它变量 $x_{m+1}, x_{m+2}, \mathrm{L}\ , x_n$ 称为非基变量。

当约束条件均为≤号时，加上松弛变量x_{s1}, x_{s2}, …, x_{sm}的系数矩阵即为单位矩阵。

用非基变量表示基变量可得到：

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - a_{1,m+2}x_{m+2} - \mathrm{L}\ - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - a_{2,m+2}x_{m+2} - \mathrm{L}\ - a_{2n}x_n \\ \mathrm{L} \\ x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - a_{m,m+2}x_{m+2} - \mathrm{L}\ - a_{mn}x_n \end{cases}$$

简写为：

$$x_i = b_i - a_{i,m+1}x_{m+1} - a_{i,m+2}x_{m+2} - \cdots - a_{in}x_n \qquad \textbf{(1.5)}$$

令所有非基变量等于零，即可找到一个解：

$$X^{(0)} = (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)^T = (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^T$$

2. 最优性检验

将(1.5)式代入目标函数：

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) x_j$$

设： $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$ 检验数

则： $\sigma_j = c_j - z_j$

定理1.4（最优解） 设 $X^{(k)} = (b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基B的一个基可行解，且对于 $x_j (j = m+1, \cdots, n)$ 一切有 $\sigma_j \le 0$，则 $X^{(k)}$ 为线性规划问题的最优解。

定理1.5（无穷多最优解） 设 $X^{(k)} = (b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基B的一个基可行解，且对于一切 $x_j (j = m+1, \cdots, n)$ 有 $\sigma_j \le 0$，同时又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+l} = 0$，则线性规划问题存在无穷多最优解。

定理1.6（无界解） 设 $X^{(k)} = (b_1', b_2', \cdots, b_m', 0, \cdots, 0)^T$ 为对应于基B的一个基可行解，存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+l} > 0$ 且有 $a_{i,m+l}$ $(i = 1, \cdots, m)$，则线性规划问题具有无界解。

3. 寻找新的基可行解

(1)确定进基变量

$$\max\left\{\sigma_j \middle| \sigma_j > 0, j = m+1, \cdots, n\right\} = \sigma_{m+l}$$

对应的变量 x_{m+l} 为进基变量。

(2)确定离基变量

$$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,m+l}} \middle| a_{i,m+l} > 0, i = 1, \cdots, m\right\} = \frac{b_h}{a_{h,m+l}}$$

对应的变量 x_h 为离基变量。

(3)迭代计算

对于列向量 P_{m+l}，以 $a_{h,m+l}$ 为主元素，将 $a_{h,m+l}$ 变为1，其余变为0，即将向量 P_{m+l} 变换为单位向量。

重复2、3直到所有的检验数小于等于0为止，则问题得到最优解。

二、单纯形表

第1步：确定初始基可行解，列出初始单纯形表。

为了书写规范和便于计算，对单纯形法的计算设计了一种专门表格，称为单纯形表。

c_j			c_1	L	L	c_m	c_{m+1}	L	L	c_n	θ_i
c_B	X_B	b	x_1	L	L	x_m	x_{m+1}	L	L	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	L	L	0	$a_{1,m+1}$	L	L	a_{1n}	θ_1
M	M	M	M			M	M			M	M
M	M	M	M			M	M			M	M
c_m	x_m	b_m	0	L	L	1	$a_{m,m+1}$	L	L	a_{mn}	θ_m
Z		$\sum c_i b_i$	0	L	L	0	$\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$				

第2步：最优性检验。

如表中所有检验数$\sigma_j \leqslant 0$，且基变量中不含有人工变量时，表中的基可行解即为最优解，计算结束。对基变量中含人工变量时的解的最优性检验将在下一节中讨论。当表中存在$\sigma_j > 0$又$P_j < 0$，则问题为无界解，计算结束；否则转下一步。

第3步：列出新的单纯形表，寻找新的基可行解。

(1)确定进基变量。

只要有检验数$\sigma_j > 0$，对应的变量x_j就可作为换入基的变量，当有一个以上检验数大于零时，一般从中找出最大一个σ_k。

$$\sigma_{m+l} = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

x_{m+l}作为进基变量(也称换入变量)

(2)确定离基变量。

根据最小θ的规则确定：

$$\theta = \min\{\frac{b_i}{a_{i,m+l}} \mid a_{i,m+l} > o\} = \frac{b_h}{a_{h,m+l}}$$

确定 x_h 是离基的变量(也称换出变量)。

元素 $a_{h,m+l}$ 决定了从一个基可行解到相邻基可行解的转移去向，取名主元素。

(3)迭代计算

以$a_{h,m+1}$，为主元素进行迭代。

第4步：重复第2，3两步，直到所有的检验数小于等于0时，计算结束。

【例1-5】用单纯形法求解线性规划问题

$$\max \quad z = 90x_1 + 70x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + \ x_2 \le 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ \qquad 5x_2 \le 65 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：将上述问题化为标准形式有：

$$\max \quad z = 90x_1 + 70x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 36 \\ 5x_2 + x_5 = 65 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

其约束条件系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

列出初始单纯形表为：